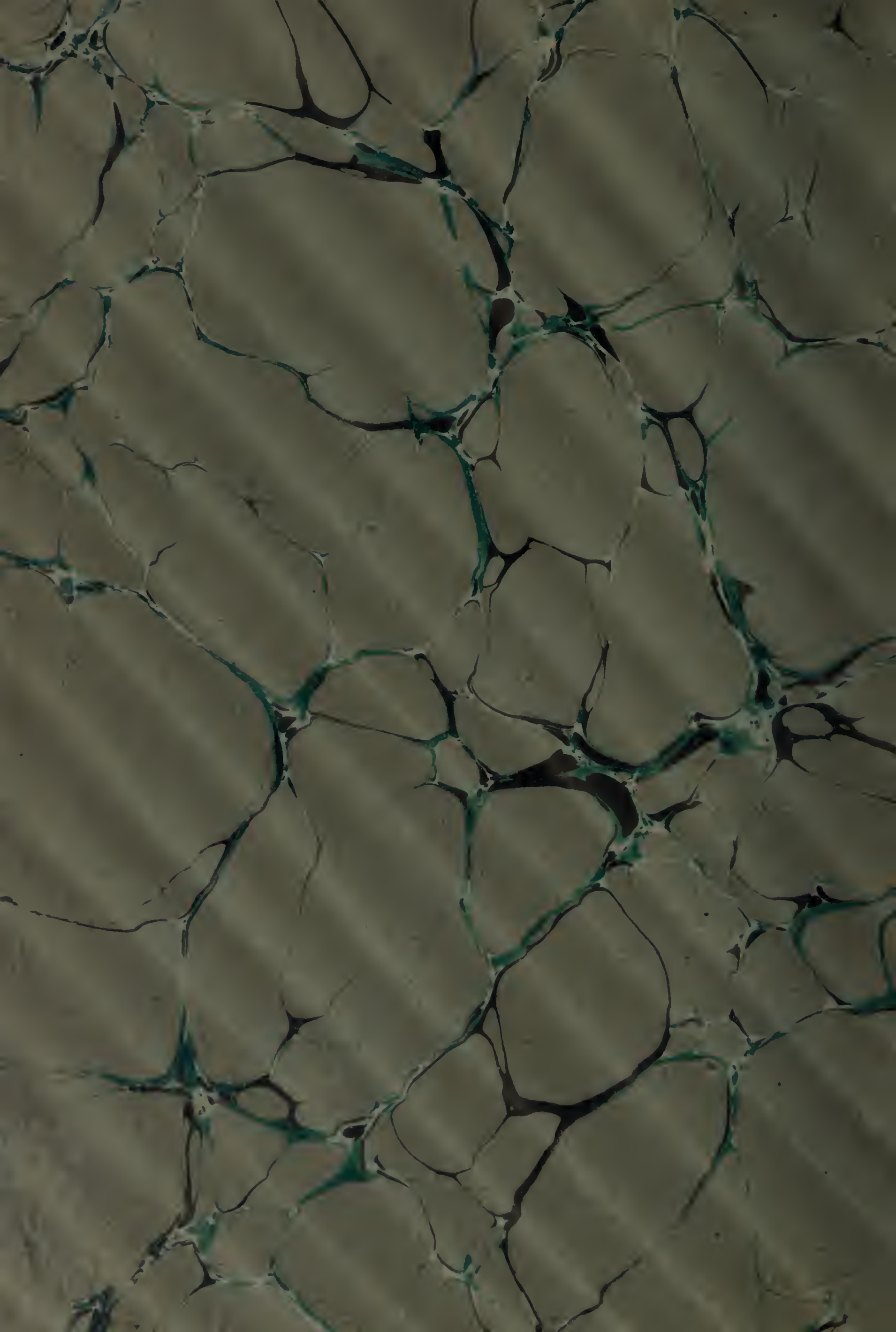
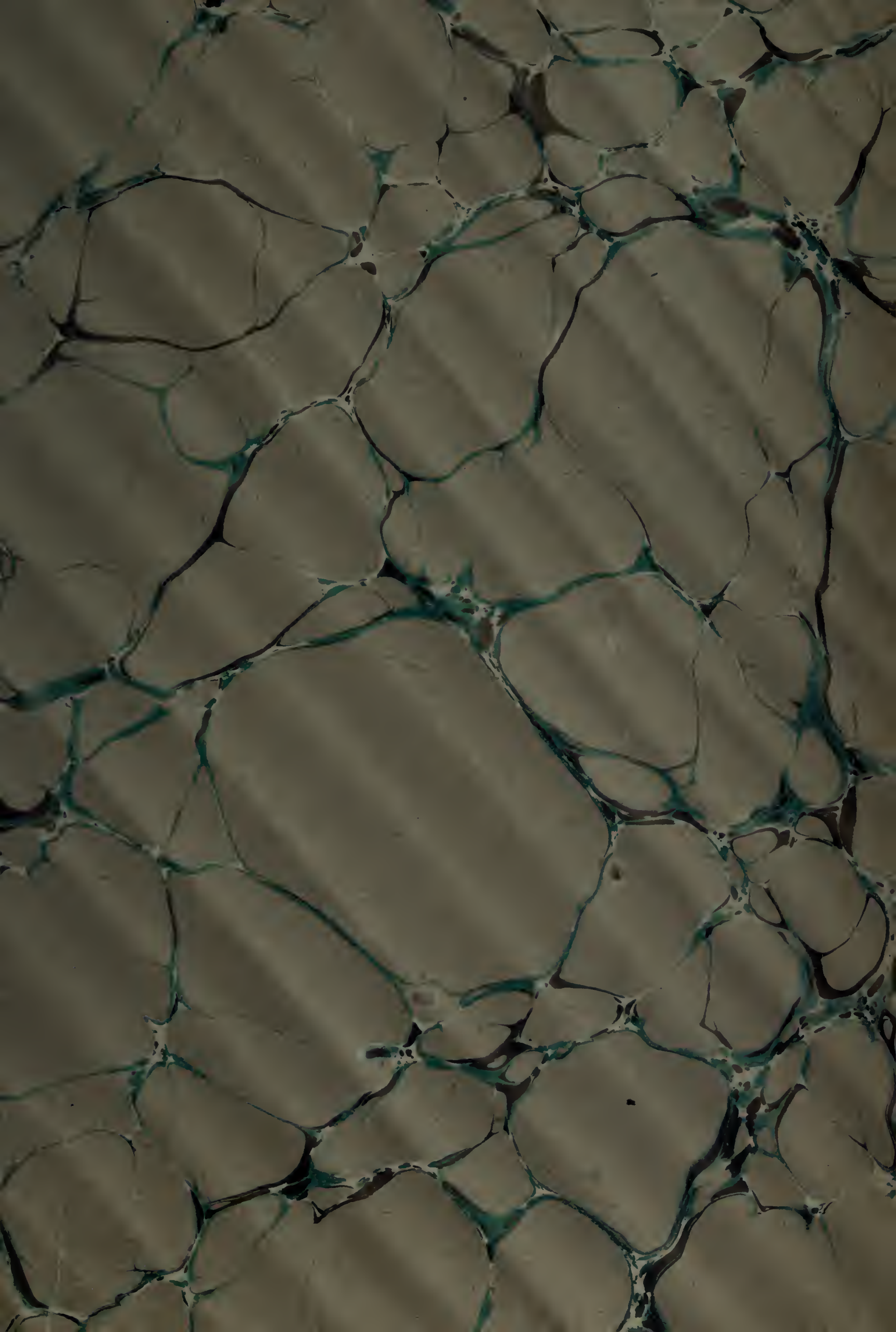
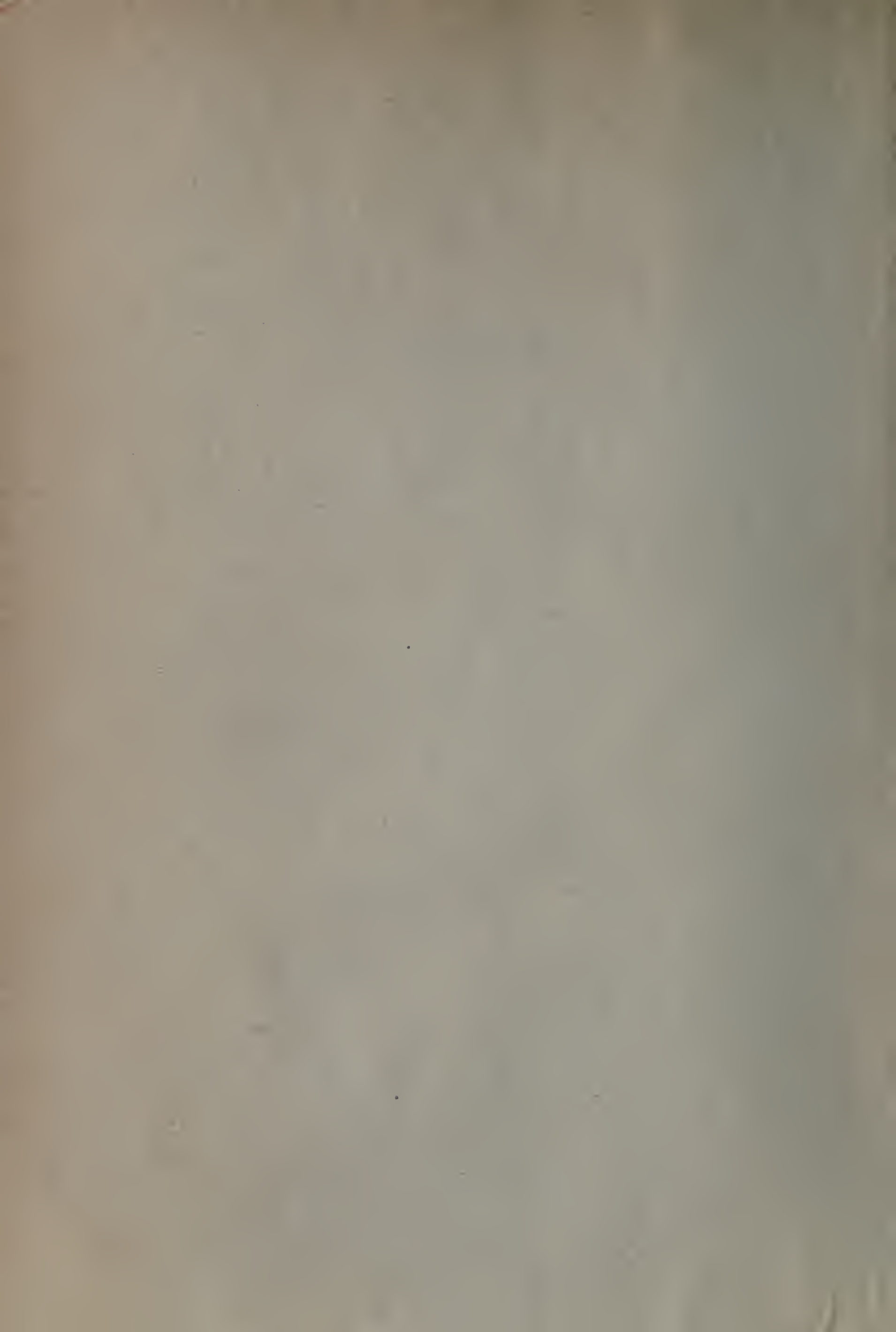
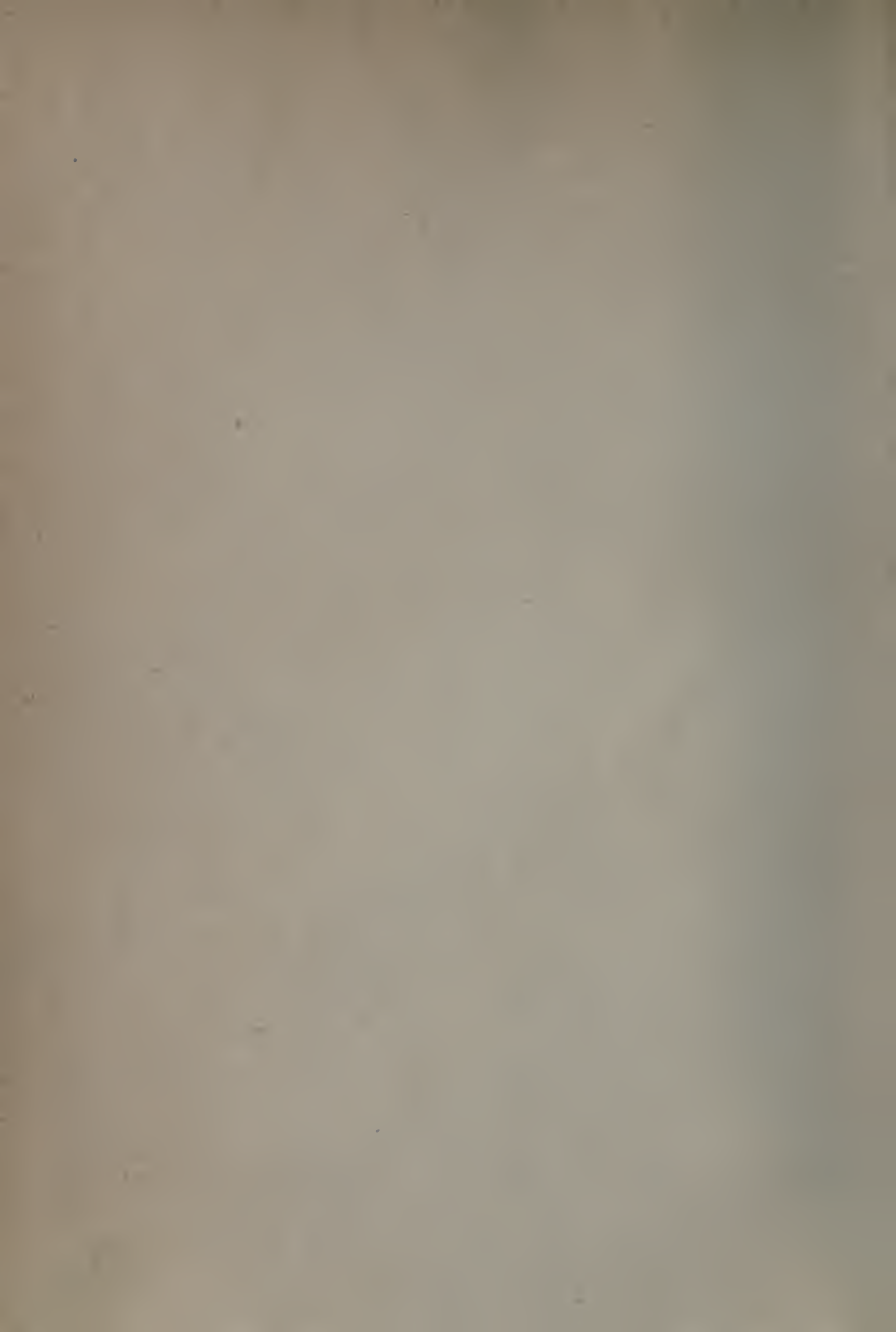

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01029002 1

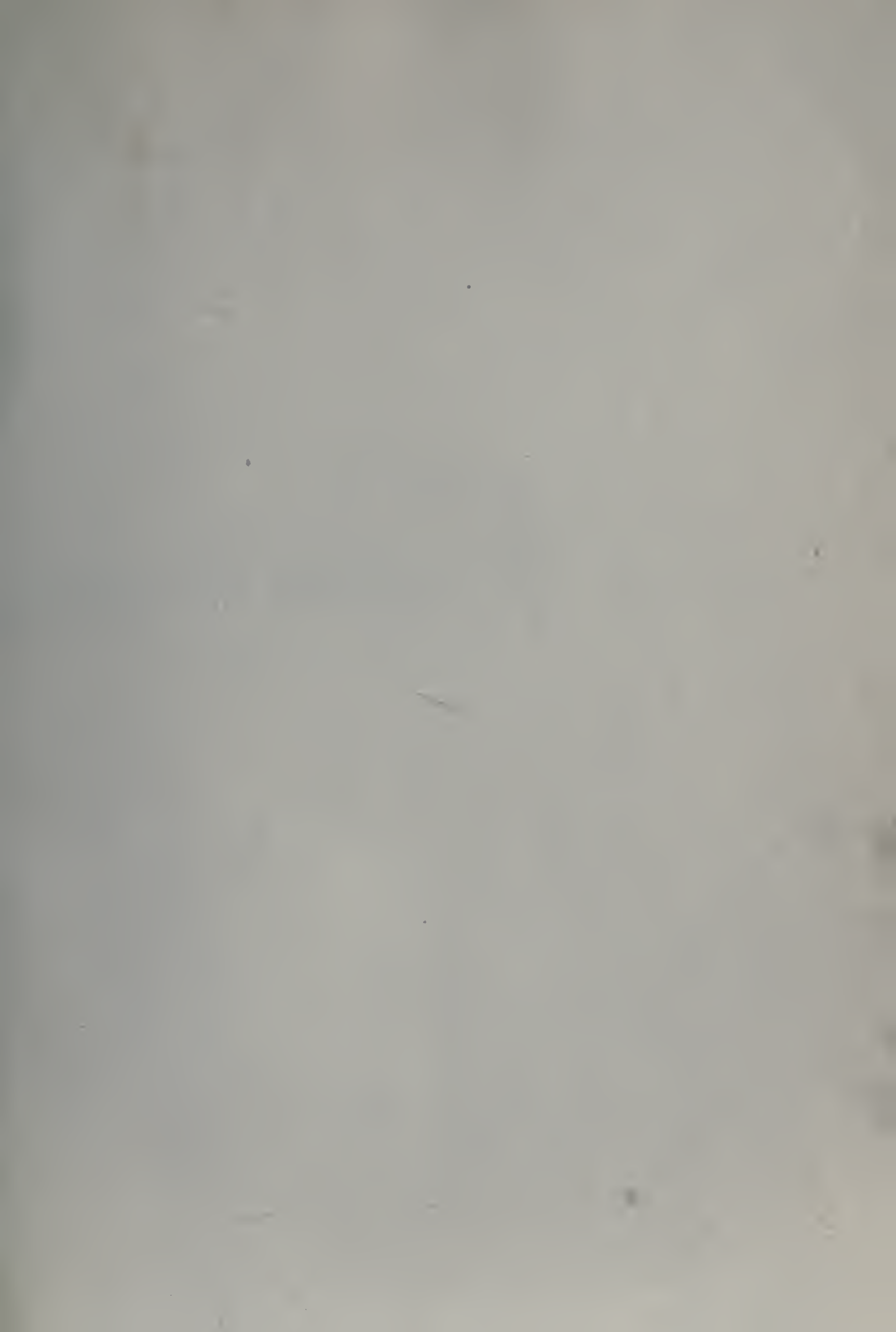


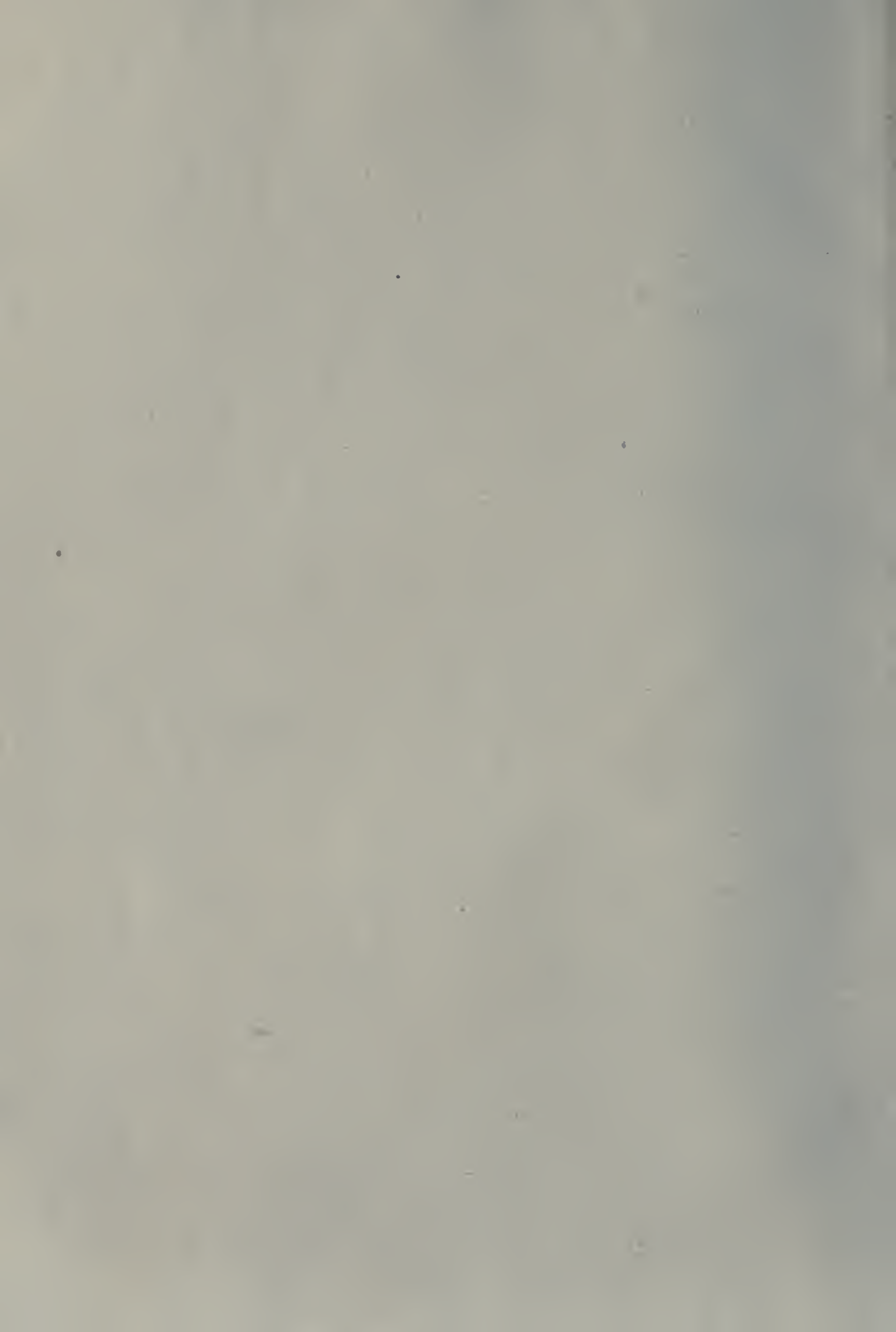












HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES.


ECCE LABORA ET NOLI
CONTRISTARI

HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES,

PAR

M. MAXIMILIEN MARIE,

RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE,
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME VI.

DE NEWTON A EULER.
(Suite.)



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1885

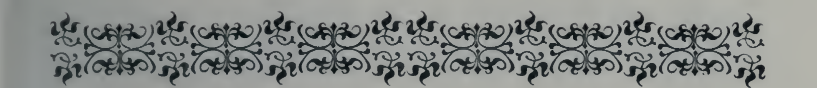
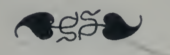
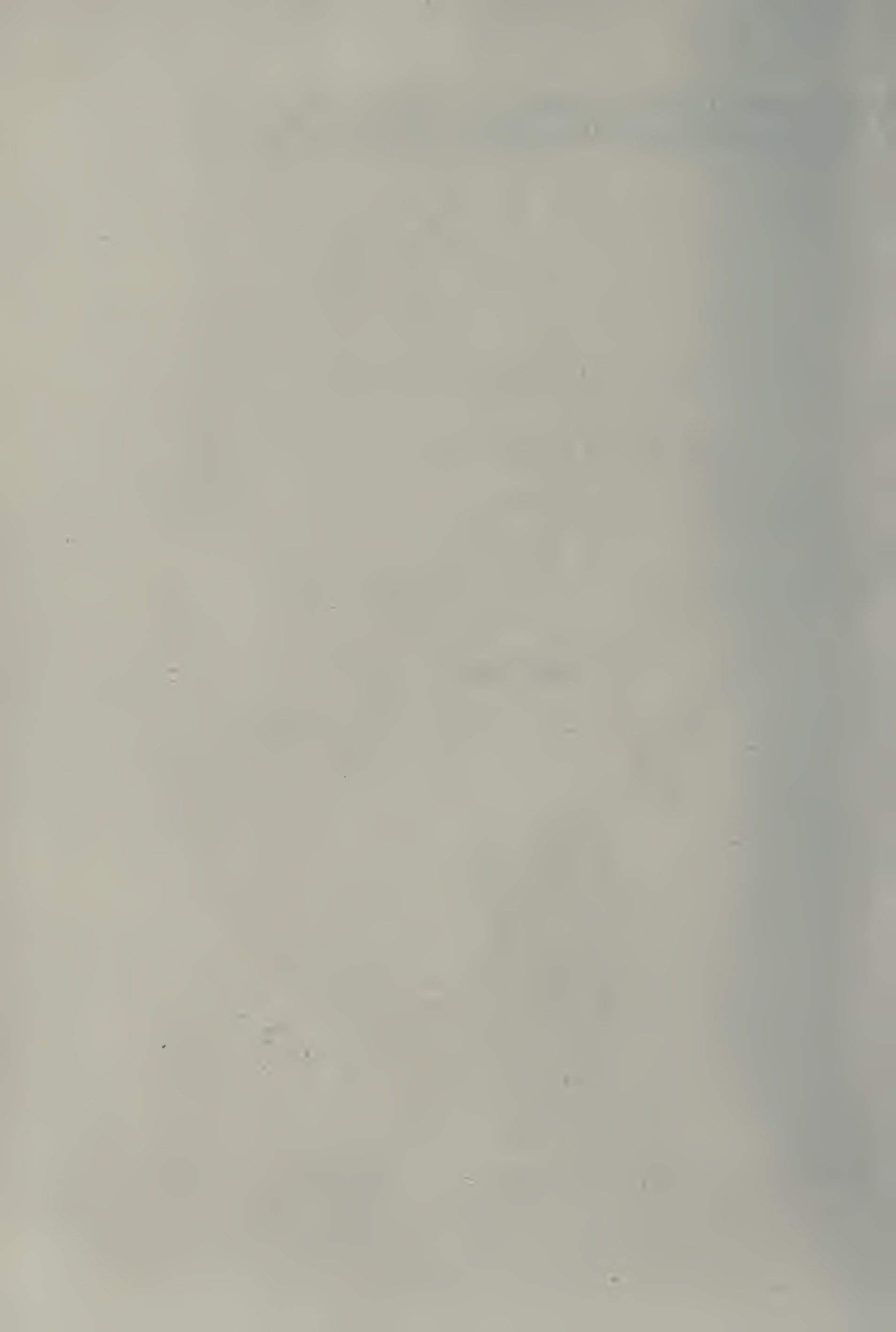


TABLE DES MATIÈRES.





ONZIÈME PÉRIODE.

(SUITE)

De NEWTON, né en 1642,
à EULER, né en 1707.

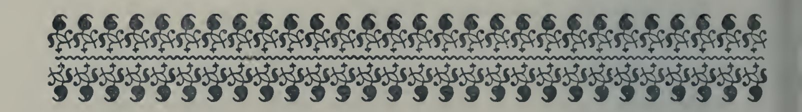
Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
NEWTON	1642	1726
DOERFEL	1643	1688
RÖMER	1644	1710
DELISLE	1644	1720
MAYOW	1645	1679
LEMERY (NICOLAS)	1645	1715
LEIBNIZ	1646	1716
FLAMSTEED	1646	1719
PAPIN	1647	1714
RAPHSON	1647	1715
CEVA	1648	1737
CHERUBIN	1650	
LEFEVRE (JEAN)	1650	1706
SAVERY	1650	1715
CHIRAC	1650	1732
DE TSCHIRNHAUSEN	1651	1708
SHARP	1651	1742
HOMBERG	1652	1715
ROLLE	1652	1719
BION	1652	1733
SAUVEUR	1653	1716
BERNOULLI (JACQUES)	1654	1705
VARIGNON	1654	1722
NIEUWENTYT	1654	1718
GUGLIELMINI	1655	1710
TOURNEFORT	1656	1708
EISENSCHMID	1656	1712
CRAIG	1656	1718
HALLEY	1656	1724
HARTSOECKER	1656	1725
TRUCHET	1657	1729
DERHAM	1657	1735

	Né en	Mort en
Fontenelle	1657	1740
Saurin	1659	1737
Stahl	1660	1734
De Lagny	1660	1734
Hoffmann	1660	1742
L'Hospital	1661	1704
Gregory (David)	1661	1710
Bianchini	1662	1729
Bignon	1662	1748
Amontons	1663	1705
Nicolas	1663	1720
Fatio de Duiller	1664	1753
Maraldi	1665	1729
Parent	1666	1716
Dangicourt	1666	1727
Bernoulli (Jean)	1667	1748
Whiston (William)	1667	1752
De Moivre	1667	1754
Boerhaave	1668	1738
Winslow	1669	1760
Newcommen	1670	1730
Hadley	1670	1744
Keill	1671	1721
Louville d'Allonville	1671	1732
Guido Grandi	1671	1742
Geoffroy	1672	1731
Keill (James)	1673	1719
Manfredi	1674	1739
Ditton	1675	1715
Graham	1675	1751
De la Garaye	1675	1755
Delisle	1676	1726
Riccati	1676	1754
Lemonnier	1676	1757
De la Hire	1677	1719
Lémery (Louis)	1677	1743
Cassini (Jacques)	1677	1756
Montmort	1678	1719
Lémery (Jacques)	1678	1721
Moitrel d'Élément	1678	1730
Hermann	1678	1733
Ons en Bray	1678	1754
Mairan	1678	1771

	Né en	Mort en
Henkel	1679	1744
Zendrini	1679	1747
Wolff	1679	1754
Santorini	1681	1736
Cotes	1682	1716
Fagnano	1682	1766
Frezier	1682	1776
Neumann	1683	1737
Desaguliers	1683	1744
Réaumur	1683	1757
Nicole	1683	1758
Taylor	1685	1731
Fahrenheit	1686	1736
Antoine de Jussieu	1686	1758
Leroy	1686	1759
Bernoulli (Nicolas)	1687	1759
Simson (Robert)	1687	1768
S'Gravesende	1688	1742
Bragelongne	1688	1744
Delisle	1688	1768
Gaubil	1689	1759
Van Musschenbroek	1692	1761
Bradley	1692	1762
Ferracino	1692	1777
Harrison	1693	1776
Peyssonnel	1694	1759
Brandt	1694	1768
Pemberton	1694	1771
Bernoulli (Nicolas II)	1695	1726
Stirling	1696	1770
Bevis	1696	1771
Albinus	1697	1770
Sarrabat	1698	1737
Du Fay	1698	1739
Mac-Laurin	1698	1746
Bouguer	1698	1758
Maupertuis	1698	1759
Klingenstierna	1698	1765
Camus	1699	1768
Bernard de Jussieu	1699	1777
Gray	1700	1760
Nollet	1700	1770
Schirach	1700	1773

	Né en	Mort en
Duhamel Dumonceau........................	1700	1781
Bianconi		1781
Bernoulli (Daniel)........................	1700	1782
Tremblay........................	1700	1784
Hull	1700	
Celsius........................	1701	1744
De la Condamine........................	1701	1774
Lecchi........................	1702	1776
Trudaine........................	1703	1765
Deparcieux	1703	1768
Rouelle (l'aîné)........................	1703	1770
Leseur	1703	1770
Dalibard........................	1703	1799
Cramer........................	1704	1752
Godin	1704	1760
Fontaine des Bertins........................	1705	1771
Dollond........................	1706	1761
Franklin........................	1706	1790
Robins	1707	1751
Linné	1707	1778



BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA ONZIÈME PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

(*Suite.*)

NEWTON.

(Né en 1642, mort en 1726.)

(Suite et fin.)

Principes de la Philosophie naturelle.

Nous voici arrivés au grand Ouvrage de Newton, dont le mérite a si justement inspiré l'admiration universelle que la postérité ne l'aperçoit plus qu'à travers des hyperboles infranchissables. Nous tâcherons d'en rendre compte sans subir l'influence des amplifications qui encombrent la voie, et sans manquer au respect dû à son immortel auteur.

On y retrouve la manie, que nous avons déjà signalée dans les autres ouvrages de Newton, de présenter, à propos des questions les plus inabordables, des solutions approchées, graphiques ou arithmétiques.

Fermat disait : *Multi pertransibunt et augebitur scientia*; Newton, au contraire, a toujours l'air de croire qu'il ne se fera

plus rien après lui et qu'il importe par conséquent qu'il dise tout ce qu'il sait, sur ce qu'il ne sait pas, de peur qu'on n'en sache jamais rien. De là bien des Chapitres que nous serons obligés de passer sous silence, parce qu'on en est resté, comme Newton, au point de départ, sur les questions auxquelles ils se rapportent. Nous en citerons quelques exemples tirés du Premier Livre.

Proposition XLVI.

Une loi quelconque de forces centripètes étant donnée, on demande, *en supposant la quadrature des courbes*, le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné avec une vitesse donnée et suivant une droite donnée, sur un plan qui ne passe pas par le centre des forces.

Proposition LIII.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les forces par lesquelles les corps feront toujours des oscillations isochrones dans des courbes données.

Proposition LIV.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les temps dans lesquels les corps montent et descendent dans des courbes quelconques par une force centripète quelconque, ces courbes étant décrites dans un plan qui passe par le centre des forces.

Proposition LVI.

En supposant la quadrature des courbes et connaissant la loi de la force qui tend vers un centre donné dans l'axe d'une surface courbe quelconque, on demande la trajectoire décrite sur

cette surface par un corps poussé suivant une vitesse et une direction quelconques, etc.

« Supposer la quadrature des courbes » doit se traduire en langage moderne par « supposer qu'on ait fait les intégrations nécessaires à la solution des problèmes énoncés. »

Une grande partie du Second Livre est employée à l'établissement d'une théorie de la résistance des milieux. Il serait inutile de dire que cette théorie laisse beaucoup à désirer, puisque la question est encore à peu près entière aujourd'hui. Mais l'objet principal que Newton y a en vue est le renversement de la doctrine des tourbillons de Descartes, et la réfutation des hypothèses de notre philosophe était déjà devenue bien superflue.

Quant au Troisième Livre, qui contient l'explication des principaux phénomènes observés relativement à la Terre et à la Lune, Newton y produit, à l'appui de ses lumineuses explications, des calculs qui ne donnent guère qu'une première approximation et dont nous nous bornerons à énoncer les résultats.

Nous nous occuperons principalement du Premier Livre, où se trouvent consignées les belles découvertes de Newton en Mécanique générale. Mais avant d'entrer dans le détail des démonstrations, nous donnerons quelques indications sur la méthode suivie par l'auteur.

Newton ne fait jamais appel aux ressources que fournit la méthode des modernes, de supposer les grandeurs représentées en nombres; il ne se sert pas davantage des méthodes de calcul de Descartes où de Viète; il en est resté à l'Algèbre d'Archimède et d'Apollonius. De là, d'abord, des longueurs interminables, une grande obscurité et beaucoup de fatigue pour le lecteur, mais aussi un grave défaut : Apollonius ne raisonnait que sur des

longueurs et il lui était facile de les représenter de façon à les faire entrer dans ses formules; Newton a, de plus, à spéculer sur des forces, des vitesses, des accélérations et des temps qu'il ne cherche à introduire sous aucune espèce.

On conçoit bien que voulant conserver leur forme antique aux relations, c'est-à-dire y faire entrer les grandeurs elles-mêmes, il se soit trouvé embarrassé en présence de grandeurs nouvelles.

Cependant les forces sont assimilables à des poids et peuvent être représentées par ceux de volumes définis d'un corps désigné; les vitesses sont des espaces, ainsi que les accélérations; enfin les temps sont, si l'on veut, des angles, ce sont ceux dont la Terre a tourné. Il était donc facile de soumettre toutes ces grandeurs au calcul, sans les supposer évaluées en nombres. Cela eût évité des longueurs bien plus apparentes dans le *Livre des Principes* que dans les *Discorsi* de Galilée ou dans l'*Horologium* de Huyghens.

Je remarquerai encore que Newton paraît avoir conservé les préjugés antiques des géomètres contre la Trigonométrie : il n'y a presque jamais recours dans son *Livre des Principes;* les formules de Trigonométrie ont cependant en Mécanique un usage tout indiqué pour la simplification des énoncés.

On serait naturellement porté à douter, si on ne savait pas le contraire, que Newton fût en possession du calcul des fluxions au moment où il composait son *Livre des Principes.* Il est à remarquer en effet que, quoiqu'il ait établi les bases de ce calcul sur des considérations dynamiques, ce qui semblerait lui assigner ses principales applications, il n'y a cependant jamais recours dans son *Livre des Principes.* Il semblerait que ce fût en réfléchissant après coup sur le genre des démonstrations employées

dans ce livre qu'il entrevit la manière plus simple dont il aurait pu le rédiger.

Y a-t-il rien en effet de plus bizarre que ce contraste : Dans l'Algèbre transcendante de Newton, la fluxion d'une grandeur variable est la vitesse avec laquelle elle croît, le temps, qui n'a rien à faire en Géométrie, y étant introduit par force, comme variable indépendante; au contraire, dans sa Mécanique, la vitesse d'un mobile, qui serait si naturellement définie comme la fluxion de l'espace, reste sans définition; c'est une grandeur dont on doit avoir le sentiment intime, qui ne se représente ni géométriquement ni algébriquement, et qui, réfractaire au calcul, ne saurait se plier à entrer dans les formules. Je sais bien que Newton, ne voulant pas encore représenter les grandeurs par des nombres et répugnant à se servir des méthodes de calcul de Descartes ou de Viète, n'aurait pu que bien difficilement définir la vitesse d'un mobile par quelque chose d'analogue à notre $\frac{ds}{dt}$. Mais, puisqu'il fait ce qu'il faut pour cela dans le calcul des fluxions, comment n'a-t-il pas été amené, avant de commencer la rédaction de son grand Ouvrage, à renoncer à la méthode d'exposition des géomètres grecs?

Nous croyons que la réponse à ces doutes se trouve dans l'hypothèse suivante : lorsque Newton écrivait le *Livre des Principes*, il était fermement résolu à tenir cachée sa méthode des fluxions; ensuite, lorsqu'il se décida, sur les instances de Halley, à le publier, après l'apparition de la *Nova methodus* de Leibniz, le temps et peut-être le courage d'en refondre la rédaction lui manquèrent.

Quoi qu'il en soit, Newton, comme je l'ai dit, n'introduit

jamais aucune vitesse dans ses formules : lorsqu'il a à comparer les vitesses de deux mobiles, ou d'un même mobile à des époques différentes, il en représente le rapport par celui des chemins infiniment petits parcourus dans des temps égaux.

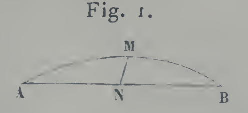
Il se sert du mot *accélération* et nous allons voir comment il introduit la chose.

Mais notons d'abord que l'accélération dont il parle est toujours celle que nous nommons accélération totale, ce en quoi il a parfaitement raison, mais il ne la décompose jamais en accélération tangentielle et en accélération centripète, ou normale, quoiqu'il sache parfaitement que l'accélération a la direction de la tangente à la trajectoire aux points où la courbure de cette trajectoire est nulle et qu'elle est au contraire normale lorsque la vitesse est momentanément constante. Il se prive ainsi d'un recours utile en bien des circonstances.

Newton va droit au but et rattache directement la notion de l'accélération d'un mobile à ce que nous appelons sa déviation.

Soient (*fig.* 1) AB un élément de la trajectoire d'un mobile,

Fig. 1.



N le milieu de la corde AB de cet arc, NM la portion d'une parallèle à la direction de la force, comprise entre le point N et la trajectoire; Newton appelle la droite MN la flèche de l'arc AB ; cela posé, si un second mobile parcourt un autre arc A′B′, dans le même temps que le premier aura mis à parcourir AB, que l'on construise de même la flèche M′N′ de A′B′, les accélérations des deux mobiles en M et en M′ (ou en d'autres points quel-

conques des arcs infiniment petits AB et A′B′) seront entre elles comme les flèches MN et M′N′, dont le rapport sera aussi égal à celui des forces accélératrices, (c'est-à-dire des forces appliquées aux parties de même poids des deux mobiles, mais Newton emploie le mot sans le définir).

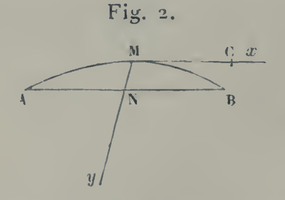
Nous représentons indifféremment l'accélération et la force rapportée à l'unité de masse par

$$\frac{2\,\mathrm{MN}}{dt^2},$$

mais Newton, qui ne représente déjà pas les vitesses, songe encore bien moins à représenter les accélérations [1].

[1] Il n'y a qu'une différence négligeable entre la manière dont Newton définit la flèche de l'arc parcouru et celle dont nous définissons la déviation: Soient (*fig.* 2) MB l'arc parcouru par le mobile dans le temps dt, MC

Fig. 2.



une distance égale à $v\,dt$ portée sur la tangente en M; CB est la déviation. Mais si nous supposons la trajectoire rapportée à la tangente au point M prise pour axe des x et à une parallèle à la force, prise pour axe des y, les équations du mouvement sont

$$x = vt + \ldots$$

et

$$y = \frac{1}{2}jt^2 + \ldots,$$

les termes négligés étant du troisième degré en t. Or on voit, par ces formules que les coordonnées MC et CB du point B sont $v\,dt$ et $\frac{1}{2}j\,dt^2$. Et, si

En résumé, la méthode dont Newton se sert dans ses *Principes de Philosophie naturelle* n'est pas celle des fluxions, il est au reste bien facile de la définir : c'est la méthode dont Huyghens s'est servi dans sa théorie de la courbure des courbes, et de leurs développées, ainsi que dans sa théorie de la force centripète ; celle dont nous nous servons dans les théories du centre instantané de rotation, de la courbure de l'enveloppe d'une courbe liée à une roulette ; etc. On trouve dans les *Principes de Philosophie naturelle* d'excellente Géométrie infinitésimale, mais je n'y ai pas découvert d'Analyse infinitésimale : j'ajoute qu'à celui qui voudrait voir le calcul des fluxions dans le *Livre des Principes*, on pourrait aussi bien montrer le calcul différentiel dans l'*Horologium*. Toutefois on trouve, comme on va le voir, dans l'œuvre de Newton, une véritable méthode, parfaitement préparée et ordonnée, tandis que les ouvrages d'Huyghens n'en contiennent que l'hypothèse, accompagnée, il est vrai, d'applications très réelles.

Newton débute (nous passons les définitions, axiomes et propositions établies avant lui) par une série de théorèmes, qu'il utilisera plus tard, sur les premières ou dernières raisons (suivant le sens dans lequel on suppose que se forment les accroissements)

l'on faisait dans les mêmes formules $t = -dt$, on trouverait pour les coordonnées du mobile

$$x = -v\,dt,$$

$$y = \frac{1}{2} j\,dt^2;$$

notre axe des y passe donc bien au milieu de la corde qui joint les positions du mobile aux époques dt et $-dt$, comme la flèche dont parle Newton ; et, en même temps, la tangente à la trajectoire, au point M de la figure de Newton, est bien parallèle à la corde AB.

de grandeurs géométriques qui deviennent en même temps évanouissantes.

Dans les exemples qu'il forme, les raisons, à leurs limites, tendent vers celle d'égalité. Mais on peut toujours, lorsque la limite d'un rapport est connue, changer l'énoncé de façon à trouver l'unité pour première raison, en multipliant le conséquent par cette limite, déterminée à l'avance. Nous croyons utile de rapporter ces exemples, en nous bornant à ceux qui présentent quelque nouveauté, car Newton commence par observer assez inutilement qu'entre l'aire d'une courbe et l'aire d'un polygone infinitésimal inscrit ou circonscrit à cette courbe, la dernière raison est celle d'égalité.

Lemme VII.

La dernière raison d'un arc de cercle à sa corde ou à sa tangente (géométrique) est la raison d'égalité.

Lemme VIII.

Les trois triangles compris, d'une part, entre deux rayons d'un cercle, prolongés au besoin, et l'arc, la corde ou la tangente qu'ils interceptent, d'autre part, sont à la fin semblables, lorsqu'ils s'évanouissent, et leur dernière raison est la raison d'égalité.

Dans la pensée de Newton, ces deux lemmes s'étendent à une courbe quelconque, pourvu qu'on lui substitue son cercle osculateur au point où l'arc tend à s'évanouir. Il ne le dit pas, mais on le voit dans les applications.

Lemme IX.

Si d'un point A d'une courbe on mène deux cordes AB et AC

de cette courbe et un axe quelconque AX, les triangles compris entre l'axe AX, les deux cordes AB et AC et deux perpendiculaires abaissées sur AX des points B et C seront à la fin semblables, lorsque les points B et C viendront se confondre avec A.

Lemme X.

Les espaces qu'une force fait parcourir au corps sur lequel elle agit (à partir du repos), soit que cette force soit invariable, soit qu'elle varie continuellement, sont, dans le commencement du mouvement, en raison doublée du temps.

Corollaire I. — Lorsque des corps qui parcouraient des arcs semblables, dans des temps proportionnels, sont sollicités par de nouvelles forces égales et appliquées dans des directions homologues, les déviations, c'est-à-dire les distances des points où les corps sont arrivés réellement aux points où ils seraient arrivés sans l'action de ces nouvelles forces, sont comme les quarrés des temps pendant lesquels ces déviations ont été produites.

Cet énoncé est vicieux : on ne voit pas pourquoi Newton introduit plusieurs corps. Il ne s'agit en effet que du principe de la composition des mouvements dus à l'action simultanée du système de forces qui agissaient sur un point matériel et de celui que communiquerait à ce point, pris à partir du repos, la force nouvellement appliquée. Mais, si Newton ne considérait qu'un corps, il ne pourrait pas établir de proportion : il serait obligé d'arriver à la formule d'une valeur.

Trois autres corollaires, qui rentrent les uns dans les autres, ne sont pas mieux exprimés. Ils se réduisent à ceci que : la déviation est proportionnelle à la force et au quarré du temps, et

ne sont que la traduction de notre formule

$$e = \frac{1}{2} j\, dt^2,$$

puisque la déviation est le chemin que la force nouvellement introduite aurait fait parcourir au mobile, pris à partir du repos.

Lemme XI.

En un point d'une courbe où la courbure est finie, la sous-tendante évanouissante de l'angle de contact est, à la fin, en raison doublée de la sous-tendante de l'arc.

La sous-tendante d'un arc est sa corde, et la sous-tendante de l'angle de contact est la distance de la seconde extrémité de l'arc à la tangente menée à l'autre extrémité.

L'énoncé signifie donc que si δ désigne la corde d'un arc évanouissant et y la distance de l'une des extrémités de cet arc à la tangente menée à l'autre,

$$\frac{\delta^2}{y} = \text{const.}$$

En effet, si l'on désigne par R le rayon de courbure d'une courbe en un de ses points, et qu'on rapporte cette courbe à la tangente et à la normale en ce point, ses équations seront

$$x = \mathrm{R} \sin\omega = 2\,\mathrm{R} \sin\frac{1}{2}\omega \cos\frac{1}{2}\omega,$$

et

$$y = \mathrm{R}(1 - \cos\omega) = 2\,\mathrm{R} \sin^2\frac{1}{2}\omega,$$

ω désignant la courbure de l'arc évanouissant considéré.

On déduit de ces formules

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\,\text{R}\sin\frac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$\frac{\delta^2}{y} = 2\,\text{R}.$$

Mais ce n'est pas là la démonstration de Newton, qui, nous l'avons déjà dit, n'emploie jamais aucune formule de Trigonométrie. Ses démonstrations, moins claires que celles qu'il est si facile d'y substituer, sont remarquables en ce qu'il était très facile d'y commettre quelques erreurs, tandis que les nôtres n'en comportent jamais ; mais leur contexture a cet inconvénient grave que Newton, ne cherchant pas des valeurs, a beaucoup de peine à s'exprimer clairement; ainsi il ne dit pas que $\frac{\delta^2}{y}$ a pour limite 2 R, mais que, si l'on considère deux cordes telles que celle que nous avons supposée, la dernière raison des δ^2 sera la même que celle des y, ce qui ne signifie pas grand chose, les deux cordes étant en même temps évanouissantes, et, par conséquent, n'en formant en réalité qu'une, ou signifie simplement que $\frac{\delta^2}{y}$ a une limite ; une infinité d'énoncés de Newton sont constitués sur ce modèle vicieux, dont les Grecs n'avaient pas laissé d'exemples [1].

[1] Les singularités de l'espèce de celle dont je parle n'étant plus connues aujourd'hui, je craindrais de n'être pas compris, si je ne prenais pas un exemple.

Supposons, au hasard, qu'une inconnue y dût être représentée en fonction de x, au moyen de constantes arbitraires a, b, c, par la formule

$$y = \sqrt{\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}\,\frac{a^2 b^3}{c^4}\,x^2}.$$

Il ajoute que le théorème subsisterait si la sous-tendante de l'angle, au lieu d'être perpendiculaire à la tangente, faisait avec elle un angle donné, ou si elle tendait à un point donné. Cela est vrai, en ce sens que $\frac{\delta^2}{y}$ aurait toujours une limite finie. Cette limite serait le produit de $2R$ par le sinus de l'angle donné, ou par le sinus de l'angle formé avec la tangente par la droite qui joindrait le point donné à l'extrémité de l'arc par lequel est menée la tangente.

Nous aurions de fréquentes occasions de présenter des observations analogues aux précédentes, mais nous ne les reproduirons plus.

Si l'on ne trouve pas le moyen d'écrire cette équation, il faudra. pour la remplacer, un nombre énorme de théorèmes.

On démontrera d'abord que a, b et c restant les mêmes, deux valeurs de y ont entre elles la raison sesquiplée des valeurs de x; que b, c et x restant invariables, deux valeurs de y sont entre elles en raison des valeurs de a; que a, b et x conservant les mêmes valeurs, deux valeurs de y sont en raison réciproque de la raison doublée des valeurs de c; enfin que a, x et c restant les mêmes, deux valeurs de y sont en raison sesquiplée des valeurs de b; et, tout cela dit, on ne saura encore rien de la présence, dans la formule, de $\frac{3}{4}$, de π et de $\sqrt{2}$. Il faudra instituer un théorème *ad hoc* pour remplir cette lacune.

Si la valeur de l'inconnue y devait être composée de plusieurs parties monomes, il faudrait la décomposer d'avance, dans l'analyse concrète, préalable, de la question, et opérer de même sur chaque partie.

Nous avons déjà vu Galilée et Huyghens multiplier ainsi les énoncés pour arriver à exprimer des formules très simples. Après avoir formulé les proportions qu'il a besoin d'exprimer pour remplacer la formule du temps d'une oscillation du pendule simple,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Huyghens, afin d'introduire π, termine par cet énoncé : Le temps d'une oscillation a avec celui de la chute verticale le long du rayon du cercle, une raison égale à elle de la demi-circonférence au diamètre.

Le théorème ou lemme est suivi de plusieurs corollaires dont le seul important est que, *lorsqu'un corps, avec une vitesse donnée, décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit.* Ce corollaire est énoncé sans démonstration. Il arrive très souvent à Newton de placer ainsi incidemment, comme corollaires, des propositions bien plus importantes que celles dont il les fait dépendre; quant à l'énoncé de celui-ci, il doit être rectifié de la manière suivante : si l'on considère sur la trajectoire d'un mobile deux arcs évanouissants AB, AB_1, et qu'on mène, des milieux c et c_1 de leurs cordes, des perpendiculaires à ces cordes, terminées aux arcs, ou des droites également inclinées sur ces mêmes cordes, ces droites ε et ε_1 seront entre elles comme les quarrés des temps employés à décrire les arcs. En effet, elles sont comme les quarrés des cordes, ou comme les quarrés des arcs, ou enfin comme les quarrés des temps employés à parcourir ces arcs, puisque la vitesse est la même.

D'ores en avant, lorsqu'il y aura lieu, nous donnerons de suite les énoncés rectifiés.

LIVRE PREMIER.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripètes.

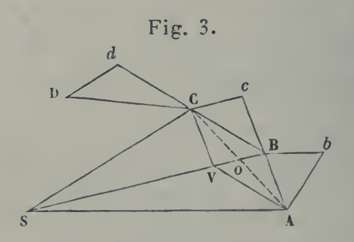
Nous arrivons aux théorèmes qui constituent les grandes découvertes de Newton en Dynamique.

Proposition I.

Théorème des aires. — Voici comment Newton démontre ce théorème : soient S le centre vers lequel tend continuellement la

force appliquée au mobile considéré, A la position de ce mobile à une époque quelconque, A*b* le chemin qu'il parcourrait dans un temps très court, en vertu de sa vitesse acquise en A : le mobile étant soumis à l'action d'une force parallèle à AS sera dévié dans cette direction, et si *b*B est le chemin que la force lui ferait parcourir dans le temps considéré, à partir du repos, celui qu'il parcourra en réalité sera AB et l'aire décrite, ASB, sera égale à l'aire AS*b* qui eût été décrite en vertu de la vitesse acquise seule. Si le

Fig. 3.



mobile, étant arrivé en B, ne se mouvait plus qu'en vertu de sa vitesse acquise, il parcourrait dans la direction du prolongement de AB, dans un temps égal au précédent, un chemin B*c* égal à AB, et l'aire décrite, BS*c*, serait égale à ASB ou à AS*b*; mais, étant soumis à l'action d'une force dirigée suivant BS, ce mobile sera dévié de *c* en C parallèlement à BS; toutefois l'aire décrite BSC sera égale à BS*c* ou à AS*b*, et ainsi de suite.

Du reste la trajectoire ABCD, etc., sera évidemment plane.

Corollaire I. — Lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, sa vitesse est à chaque instant réciproquement proportionnelle à la distance du centre d'action à la tangente à la trajectoire.

Corollaire II. — Si l'on achève le parallélogramme déterminé par les cordes AB, BC de deux arcs parcourus consécutive-

ment par le mobile dans des temps égaux, la diagonale BV de ce parallélogramme, à la limite, passera par le centre des forces.

Corollaire III. — Les diagonales telles que BV, construites de proche en proche, représentent les déviations subies par le mobile; elles sont donc proportionnelles aux intensités de la force.

Nous dirions que $BV = \frac{1}{2} j dt^2$, j désignant la force appliquée à l'unité de masse en B et dt une des parties infinitésimales du temps.

Corollaire IV. — La moitié BO de la diagonale BV est ce que Newton a déjà appelé la flèche de l'arc ABC. C'est la parallèle à la direction de la force, menée par le milieu de la corde et comprise entre ce milieu et l'arc. C'est pourquoi Newton dit : les flèches des arcs évanouissants parcourus en des temps égaux représentent aussi proportionnellement les intensités de la force.

Corollaire V. — La force accélératrice, dans ce qui précède, est à la force de la gravité comme la flèche de l'arc décrit est à la flèche verticale de l'arc parabolique qu'un projectile décrit dans le même temps.

Corollaire VI. — Tout ce qui vient d'être dit subsisterait si le plan dans lequel se meut le mobile et le point où tend la force dans ce plan, au lieu d'être fixes, se mouvaient uniformément en ligne droite.

Proposition II.

C'est la réciproque de la précédente.

Proposition III.

Si un corps décrit autour d'un autre, qui se meut d'une manière quelconque, des aires proportionnelles au temps, la

force qui sollicite le premier est composée d'une force qui tend vers le second et de la force accélératrice qui anime ce second corps.

Il serait superflu de faire remarquer l'importance de cette proposition capitale où se trouve introduite pour la première fois la considération des mouvements relatifs.

Proposition IV.

Cette proposition a trait à la force qui entretient le mouvement uniforme d'un mobile dans une circonférence de cercle. Comme Newton n'évalue pas l'accélération du mobile, il est obligé, ainsi qu'Huyghens, de multiplier les énoncés, pour remplacer la connaissance de la formule $\frac{v^2}{r}$ de cette accélération.

Proposition V.

Sachant qu'un corps est soumis à l'action d'une force qui passe par un point fixe, et connaissant les vitesses de ce corps dans trois de ses positions données, trouver le centre d'action. Il faut, pour cela, construire le point dont les distances aux trois tangentes à la trajectoire, aux points donnés, seraient inversement proportionnelles aux trois vitesses.

Proposition VI.

Si un corps se meut sous l'action d'une force dirigée vers un point fixe, que l'on considère un arc parcouru dans un temps très court et qu'on imagine la flèche de cet arc, menée par le milieu de la corde et dirigée vers le centre d'action, la force accélératrice, au point milieu de l'arc (ou en un point quelconque

de cet arc) sera proportionnelle à cette flèche et en raison doublée inverse du temps employé à parcourir l'arc.

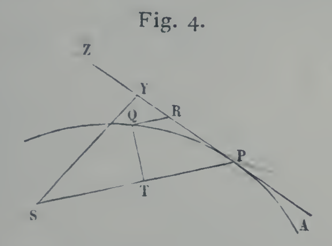
En effet, la flèche considérée étant la déviation produite dans la moitié du temps employé, le théorème rentre dans l'un des précédents et ne constitue qu'une traduction nouvelle de notre formule moderne

$$f = \frac{1}{2} j \left(\frac{dt}{2}\right)^2,$$

où f représente la flèche et dt le temps employé à parcourir l'arc entier.

Corollaires I et II. — Soient APQ (*fig.* 4) la trajectoire d'un

Fig. 4.



mobile soumis à l'action d'une force centrale dirigée vers S, P un point quelconque de cette trajectoire, PZ la tangente en P, Q un point infiniment voisin de P, QR la parallèle à SP, qui représente la déviation de P en Q, enfin QT et SY des perpendiculaires abaissées de Q et de S sur SP et PZ : Newton dit que la force appliquée au mobile en P est réciproquement proportionnelle à

$$\frac{\overline{SP}^2 . \overline{QT}^2}{QR} \quad \text{ou à} \quad \frac{\overline{SY}^2 . \overline{QP}^2}{QR}.$$

En effet, QR est la flèche de l'arc double de PQ ; et d'un autre

côté, le temps employé à parcourir l'arc PQ est proportionnel à l'aire décrite SPQ, qui se mesure indifféremment par $\frac{1}{2}$ SP.QT ou par $\frac{1}{2}$ SY.QP.

Nous dirions plus simplement

$$j = \frac{2f}{dt^2},$$

f désignant la flèche ou la déviation RQ, et dt le temps employé par le mobile pour aller de P en Q; représentant donc par k^2 l'aire décrite dans l'unité de temps, de sorte que SP.QT et SY.QP auraient pour valeur commune

$$2k^2 dt,$$

nous remplacerions dt par $\frac{\text{SP.QT}}{2k^2}$ ou par $\frac{\text{SY.QP}}{2k^2}$, ce qui donnerait

$$j = \frac{8k^4 f}{\overline{\text{SP}}^2 . \overline{\text{QT}}^2} = \frac{8k^4 f}{\overline{\text{SY}}^2 . \overline{\text{QP}}^2}.$$

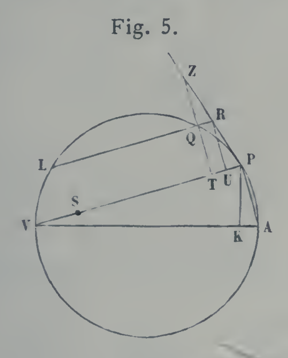
Cette proposition est la plus importante de toute la théorie; elle fournira très simplement, comme on va le voir, la valeur de l'intensité de la force, lorsque la trajectoire sera donnée, ainsi que le centre d'action S.

Proposition VII.

Trouver la force, dirigée vers un point fixe, qui fait parcourir à un mobile une circonférence de cercle. Soient S (*fig.* 5) le point fixe, APQLV la circonférence de cercle que décrit le mo-

bile, P la position actuelle de ce mobile, PSV la corde du cercle joignant les deux points P et S, AV le diamètre passant par la seconde extrémité V de cette corde, Q une position du mobile infiniment voisine de P, QL la corde menée par Q parallèlement à PV, R le point de rencontre de cette corde prolongée avec la tangente à la trajectoire en P, enfin QT la perpendiculaire

Fig. 5.



abaissée de Q sur SP, RU la parallèle à QT et PK la perpendiculaire abaissée de P sur AV : la force cherchée est, comme on l'a vu,

$$j = \frac{8k^4 . \text{QR}}{\overline{\text{SP}}^2 . \overline{\text{QT}}^2},$$

k^2 dépendant de la vitesse et de la position initiales du mobile $\Big($nous aimons mieux donner sa valeur que de dire comme Newton qu'elle est proportionnelle à $\frac{\text{QR}}{\overline{\text{SP}}^2 . \overline{\text{QT}}^2}\Big)$; il s'agit de donner une autre forme au quotient $\frac{\text{QR}}{\overline{\text{QT}}^2}$, car $\overline{\text{SP}}^2$ doit rester

dans l'expression de la force. Or

$$QR.RL = \overline{RP}^2,$$

d'où

$$QR = \frac{\overline{RP}^2}{RL};$$

d'un autre côté les triangles semblables RUP et VPA donnent

$$\frac{\overline{RU}^2}{\overline{RP}^2} = \frac{\overline{VP}^2}{\overline{AV}^2},$$

d'où

$$\overline{RU}^2 = \overline{QT}^2 = \frac{\overline{RP}^2.\overline{VP}^2}{\overline{AV}^2} = \frac{\overline{RP}^2.\overline{VP}^2}{4R^2},$$

R désignant le rayon du cercle. Par conséquent

$$\frac{QR}{\overline{QT}^2} = \frac{4R^2}{RL.\overline{VP}^2} = \frac{4R^2}{\overline{VP}^3},$$

puisque RL tend à se confondre avec VP. Donc, en résumé, l'accélération, ou la force accélératrice cherchée, est

$$\frac{32k^4R^2}{\overline{SP}^2.\overline{VP}^3}.$$

Elle varie en raison inverse du quarré de la distance du mobile au point fixe et du cube de la corde de la trajectoire circulaire, qui passe par le mobile et le point fixe.

La démonstration de Newton est beaucoup plus obscure parce que, au lieu du triangle RUP, il considère le triangle ZTP.

Si le point donné S était sur la circonférence, VP se confondrait avec SP et alors la force accélératrice varierait en raison

inverse de la cinquième puissance de la distance du mobile au centre d'action.

Proposition VIII.

Newton se propose la même question relativement à une trajectoire circulaire, mais en supposant le centre S d'action à une distance infinie.

Dans cette hypothèse, SP serait infini, et si le mouvement avait lieu avec une vitesse finie, k serait aussi infini. Soit v_0 la vitesse du mobile à l'extrémité du diamètre dirigé vers le point S, k^2 aurait pour valeur

$$\frac{1}{2} v_0 \, \mathrm{SP};$$

et par suite l'expression de la force accélératrice deviendrait

$$8 \frac{v_0^2 \mathrm{R}^2}{\overline{\mathrm{VP}}^3}.$$

Cette force varierait donc en raison inverse du cube de la corde VP parallèle à la direction dans laquelle se serait éloigné le point S.

Proposition IX.

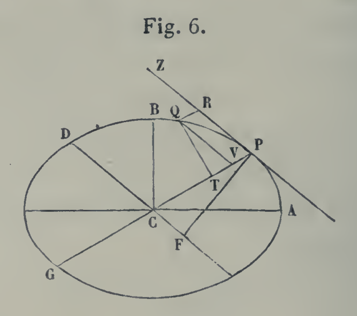
Newton suppose que la trajectoire est une spirale logarithmique et que le centre d'action est au point asymptote de la spirale. Il trouve que la force centripète est réciproquement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre.

Proposition X.

Trouver la force qui fait parcourir une ellipse à un mobile, cette force étant supposée dirigée vers le centre de l'ellipse.

Soient (*fig*. 6) CA, CB les deux axes de l'ellipse, P une position du mobile, CD le demi-diamètre conjugué de CP, Q une position du mobile infiniment voisine de P, PZ la tangente en P, QR et

Fig. 6.



QV parallèles respectivement à CP et DC, QT et PF perpendiculaires à CP et DC :

L'intensité de la force cherchée est représentée par

$$\frac{8k^4 QR}{\overline{CP}^2 . \overline{QT}^2}.$$

Or

$$\frac{PV.VG}{\overline{QV}^2} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CD}^2},$$

d'où

$$PV = QR = \frac{\overline{CP}^2 . \overline{QV}^2}{VG.\overline{CD}^2};$$

d'un autre côté les deux triangles semblables QVT et PCF donnent

$$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{PF}^2},$$

d'où

$$\overline{QV}^2 = \frac{\overline{QT}^2.\overline{CP}^2}{\overline{PF}^2},$$

et, en substituant,

$$QR = \frac{\overline{CP}^4.\overline{QT}^2}{VG.\overline{CD}^2.\overline{PF}^2},$$

d'où, par conséquent,

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2.\overline{QT}^2} = \frac{\overline{CP}^2}{VG.\overline{CD}^2.\overline{PF}^2};$$

mais VG, à la limite, tend vers 2 CP, donc

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2.\overline{QT}^2} \quad \text{se réduit à} \quad \frac{CP}{2\overline{CD}^2.\overline{PF}^2}.$$

Mais $CD \times PF$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués CP et CD, ou ab, en désignant par a et b les deux demi-axes, donc

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2.\overline{QT}^2} = \frac{CP}{2a^2b^2}$$

et

$$j = \frac{8k^4}{2a^2b^2}CP = \frac{4k^4}{a^2b^2}CP.$$

Ainsi, comme le dit Newton, la force accélératrice, dans ce cas, est proportionnelle à la distance.

Si, comme Newton le remarque, l'ellipse dégénérait en parabole, la force serait constante, et l'on retomberait dans le cas traité par Galilée.

TROISIÈME SECTION.

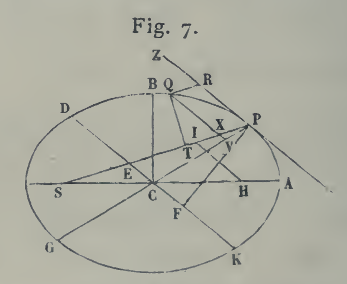
Du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques.

Proposition XI.

Trouver la force qui fait parcourir une ellipse à un mobile, en supposant cette force dirigée vers l'un des foyers.

Soient (*fig.* 7) APQ ... la trajectoire elliptique considérée, dont les demi-axes sont CA et CB, S le foyer vers lequel tend

Fig. 7.



la force appliquée au mobile, H l'autre foyer, P une position du mobile, Q la position infiniment voisine, PZ la tangente en P, QR et QT la parallèle et la perpendiculaire à SP :

La force cherchée est toujours représentée par

$$\frac{8k^4.\mathrm{QR}}{\overline{\mathrm{SP}}^2.\mathrm{QT}^2}.$$

Soient CD le diamètre conjugué de CP, QV l'ordonnée du point Q, au diamètre CP, X le point de rencontre de QV et de SP, HI une parallèle à la tangente en P et E le point d'intersection de SP et de CD :

$$\mathrm{QR} = \mathrm{XP};$$

d'un autre côté, à cause des triangles semblables XPV et EPC,

$$XP : VP :: EP : CP,$$

mais le point E est le milieu de SI, puisque CE est parallèle à HI et que le point C est le milieu de SH; donc

$$EP = \frac{SP + IP}{2} = \frac{SP + PH}{2} = CA,$$

car

$$PH = PI;$$

donc

$$QR = XP = \frac{VP.CA}{CP}.$$

D'ailleurs, si l'on abaisse PF perpendiculaire à DCK, les deux triangles QTX et EPF seront semblables et donneront

$$QX : QT :: PE : PF,$$

d'où

$$QT = \frac{QX.PF}{PE} = \frac{QX.PF}{CA}.$$

Mais QX tend vers QV (cela est vrai parce que XV est de même ordre que XP ou QR, et que QR est infiniment petit par rapport à QX, mais Newton ne donne aucune raison); donc

$$QT = \frac{QV.PF}{CA};$$

enfin

$$\overline{QV}^2 = VP.GP\,\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2};$$

par conséquent

$$\overline{QT}^2 = \frac{VP.GP \dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2}}{\overline{CA}^2} \overline{PF}^2,$$

ou, puisque GP se réduit à 2 CP,

$$QT^2 = \frac{2\,VP.\overline{CD}^2}{CP.CA} \overline{PF}^2.$$

En remplaçant QR et $\overline{QT}^2$ par les valeurs qu'on vient de trouver, dans l'expression de la force

$$\frac{8\,k^4 QR}{\overline{SP}^2.\overline{QT}^2},$$

il vient

$$8\,k^4 \frac{VP.CA}{CP.\overline{SP}^2 \dfrac{2\,VP.\overline{CD}^2}{CP.\overline{CA}} \overline{PF}^2} = 4\,k^4 \frac{\overline{CA}^3}{\overline{CD}^2.\overline{PF}^2} \frac{1}{\overline{SP}^2}.$$

Mais

$$\overline{PF}^2.\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2.\overline{CB}^2;$$

donc enfin la force accélératrice est

$$j = 4\,k^4 \frac{1}{\dfrac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}}} \frac{1}{SP^2} = 8\,k^4 \frac{1}{L} \frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{8\,k^4}{L.\overline{SP}^2},$$

L désignant le paramètre $2\,\dfrac{\overline{CB}^2}{CA}$ de l'ellipse. La force qui agit sur le mobile varie donc en raison inverse du quarré de sa distance au centre d'action.

Proposition XII et XIII.

Théorèmes analogues relativement à des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.

Proposition XIV.

Si plusieurs corps sont soumis à des forces accélératrices dirigées vers un même point et qui varient en raison inverse des quarrés des distances, les paramètres de leurs orbes seront en raison doublée des aires qu'ils décrivent en temps égal.

En effet, on vient de trouver, pour une quelconque des trajectoires,

$$j = \frac{8k^4}{L.\overline{SP}^2},$$

mais on suppose $j.\overline{SP}^2$ constant non seulement pour chaque mobile, mais d'un mobile à un autre, donc

$$\frac{k^4}{L} = \text{constante}.$$

La démonstration de Newton est naturellement un peu plus longue, parce qu'il n'a pas cherché l'expression de la force accélératrice.

Corollaire. — L'aire entière de la trajectoire (elliptique) est en raison composée de la raison sous-double du paramètre et de la raison du temps périodique. C'est-à-dire, en appelant a et b, a' et b' les demi-axes de deux orbes elliptiques, ω et ω' les temps des révolutions des mobiles dans ces deux orbes, L et L' les deux paramètres,

$$\frac{ab}{a'b'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{\omega}{\omega'}.$$

En effet

$$\omega k^2 = \pi ab \text{ et } \omega' k'^2 = \pi a' b',$$

d'où

$$\frac{ab}{a' b'} = \frac{\omega k^2}{\omega' k'^2},$$

mais

$$\frac{k^2}{\sqrt{L}} = \frac{k'^2}{\sqrt{L'}} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{k'^2} = \sqrt{\frac{L}{L'}}$$

donc

$$\frac{ab}{a' b'} = \frac{\omega}{\omega'} \sqrt{\frac{L}{L'}}.$$

Proposition XV.

Les hypothèses restant les mêmes, les temps des révolutions sont entre eux en raison sesquiplée des grands axes (c'est-à-dire les quarrés des temps des révolutions sont comme les cubes des grands axes des orbites).

En effet

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{ab}{\sqrt{L}} : \frac{a' b'}{\sqrt{L'}},$$

mais $L = \frac{2b^2}{a}$ et $L' = \frac{2b'^2}{a'}$, donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}}.$$

Les démonstrations de Newton sont naturellement un peu pénibles, parce qu'il ne pose jamais aucune égalité, mais nous n'en changeons que la forme.

Proposition XVI.

Dans les mêmes hypothèses, si l'on mène les tangentes à deux trajectoires, en deux points quelconques, et que du foyer commun on abaisse des perpendiculaires sur ces tangentes, les vitesses des deux mobiles lorsqu'ils passeront aux points considérés seront entre elles en raison composée de la raison sous-doublée des paramètres et de la raison inverse de celle des perpendiculaires.

C'est-à-dire, en désignant par v et v' les deux vitesses, et par p et p' les distances au foyer commun des deux tangentes suivant lesquelles elles sont dirigées,

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{p'}{p}.$$

En effet

$$vp = k^2 \text{ et } v'p' = k'^2,$$

donc

$$\frac{v}{v'} = \frac{k^2}{k'^2}\,\frac{p'}{p};$$

mais

$$\frac{k^2}{k'^2} = \sqrt{\frac{L}{L'}},$$

donc

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{p'}{p}.$$

Corollaire I.

$$\frac{L}{L'} = \frac{v^2}{v'^2}\,\frac{p^2}{p'^2}.$$

Corollaire II. — Aux sommets situés sur les axes focaux,

p et p' se confondent avec SP et SP'. Donc

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}} \frac{d'}{d},$$

en appelant d et d' les deux distances.

Corollaire III. — Si l'une des ellipses était un cercle (ayant son centre au foyer commun), et si ce cercle touchait l'une des ellipses à l'une des extrémités de son axe focal, les vitesses des deux mobiles, au point de contact, seraient entre elles comme

$$\sqrt{L} : \sqrt{L'}$$

ou comme

$$\sqrt{2\frac{b^2}{a}} : \sqrt{2R},$$

ou enfin comme

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}} : \sqrt{R},$$

R désignant l'une des distances $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$.

L'intérêt que Newton attache à cette remarque tient à ce que la relation de la vitesse à l'accélération, dans un cercle, étant supposée mieux étudiée que dans une trajectoire quelconque, et l'accélération étant la même, dans l'espèce, au point de contact de l'ellipse et du cercle considérés, on pourra déduire la vitesse dans l'ellipse, à l'une des extrémités de l'axe focal, de la vitesse dans le cercle.

Newton ne se serait pas embarrassé de cette remarque, ni de beaucoup d'autres analogues, si, au lieu de rapports, il avait établi des égalités. Il ne donne même pas la formule relative au cercle

$$j = \frac{v^2}{R}.$$

Corollaire IV. — Si l'on considère deux des corps aux moments où ils passent par les extrémités des petits axes de leurs orbes,

$$p = b \text{ et } p' = b',$$

et la relation

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{p'}{p}$$

devient alors

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{b^2 a'}{b'^2 a}}\,\frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{a'}{a}} = \sqrt{\frac{d'}{d}},$$

d et d' désignant les distances des deux mobiles au centre d'action.

Corollaire V. — Si les paramètres de deux trajectoires sont égaux, à ces mêmes moments

$$vp = v'p',$$

mais d'ailleurs chacun des produits est constant.

Proposition XVII.

Un mobile soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, et qui varie en raison inverse du quarré de la distance, décrit une conique dont le point fixe occupe l'un des foyers. Nous passons cette réciproque.

QUATRIÈME ET CINQUIÈME SECTIONS.

De la détermination des orbes elliptiques, paraboliques et hyperboliques, 1° lorsque l'un des foyers est donné; 2° lorsqu'on ne donne ni l'un ni l'autre.

Newton s'occupe, dans ces deux sections, de la construction d'une conique dans des conditions diverses. Les questions qu'il

traite ne sont naturellement pas toutes nouvelles; nous en supposerons les solutions connues, lorsqu'elles devront être utilisées.

SIXIÈME SECTION.

De la détermination des mouvements dans des orbes donnés.

Newton passe à la solution approchée du problème, capital en Astronomie, de déterminer la position du mobile qui décrit une conique, dans les conditions supposées précédemment, connaissant, par exemple, le temps écoulé depuis le passage de ce mobile au sommet le plus voisin du foyer vers lequel tend la force qui lui est appliquée.

Il s'agit de diviser l'aire de la trajectoire en secteurs égaux ayant pour sommet commun le foyer, mais la question ne peut être résolue exactement que dans le cas d'une trajectoire parabolique, puisque la parabole est la seule des trois coniques qui soit quarrable algébriquement.

Voici la solution que Newton donne pour ce cas :

Soient (*fig.* 8) S le foyer de la parabole, A son sommet, G le milieu de AS, $4\,AS \times M$ l'aire que le rayon vecteur du mobile a dû décrire dans le temps donné, depuis son passage en A : il s'agit de trouver le point P où le mobile est parvenu. Pour cela on élèvera à AS, en G, une perpendiculaire, sur laquelle on prendra GH égale à 3 M, et du point H comme centre on décrira le cercle SP.

Ce théorème est facile à vérifier, car abaissant PO perpendiculaire à l'axe et tirant PH, on aura

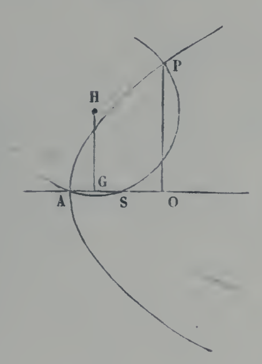
$$\begin{aligned}\overline{AG}^2 + \overline{GH}^2 &= \overline{HP}^2\\ &= (AO - AG)^2 + (PO - HG)^2\\ &= \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 - 2\,AG.AO - 2\,GH.PO + \overline{AG}^2 + \overline{GH}^2\end{aligned}$$

ou

$$2\,GH.PO = \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 - 2\,AG.AO$$
$$= \overline{AO}^2 - \frac{3}{4}\overline{PO}^2.$$

Écrivant ensuite $AO \times \dfrac{\overline{PO}^2}{4\,AS}$ au lieu de $\overline{AO}^2$, divisant tous les

Fig. 8.



termes par 3 PO et les multipliant par 2 AS, on aura

$$\frac{4}{3}\,GH.AS = \frac{1}{6}\,AO.PO + \frac{1}{2}\,AS.PO$$
$$= \frac{AO + 3\,AS}{6}\,PO$$
$$= \frac{4\,AO - 3\,SO}{6}\,PO$$
$$= \text{aire } APO - \text{aire } SPO$$
$$= \text{aire } APS,$$

mais, à cause que $GH = 3M$, on a

$$\frac{4}{3} GH.AS = 4 AS.M.$$

Donc l'aire APS est bien égale à $4 AS.M$.

C'est à peu près sur ce modèle que sont faites toutes les démonstrations de Newton. On peut juger par cet exemple s'il est facile de les suivre. Du reste, la construction, qu'il faudrait effectuer dans le ciel, ne sera pas d'une grande utilité.

Newton paraît au désespoir de ne pouvoir rien trouver d'analogue pour le cas d'une orbite elliptique, il en donne du reste une explication très remarquable : La portion de l'aire d'une ovale quelconque, comprise entre un rayon vecteur fixe et un autre mobile, « ne peut pas, dit-il, être trouvée par une équation composée d'un nombre fini de termes », parce que cette aire pourrait être augmentée d'un nombre quelconque de fois l'aire entière de l'ovale sans que la position du rayon vecteur mobile changeât, de sorte que l'équation qui lierait l'abscisse, par exemple, de l'extrémité de ce rayon vecteur, et l'aire du secteur, aurait une infinité de racines, si l'on y considérait l'aire comme l'inconnue.

C'est évident, et j'ajoute que cette remarque, à laquelle, bien entendu, Newton ne pouvait attacher une telle importance, contient en germe la notion fondamentale la plus naturelle des périodes des intégrales.

Mais je remarque que Newton devrait avoir aussi bien en vue l'hyperbole que l'ellipse, et que l'hyperbole n'ayant rien de l'ovale (à moins qu'on n'en considère les conjuguées elliptiques) son raisonnement ne lui est pas du tout applicable, quoique la difficulté soit la même, ce qui deviendrait évident si l'on cher-

chait à exprimer les aires des secteurs des deux courbes au moyen des fonctions trigonométriques. Mais Newton n'aime pas la Trigonométrie.

Nous ne reproduisons pas les diverses solutions qu'il donne du problème, parce que, tout ingénieuses et remarquables qu'elles sont, elles n'auraient plus de valeur aujourd'hui. Nous nous bornons à dire que, dans l'une d'elles, il fait intervenir une cycloïde pour la construction du point cherché, où doit se trouver le mobile.

SEPTIÈME SECTION.

De l'ascension et de la descente rectilignes des corps.

Newton aborde ici la question du mouvement rectiligne d'un point soumis, à partir du repos, à l'action d'une force variant en raison inverse du quarré de la distance à un point fixe.

La solution qu'il en donne paraîtrait fournir une preuve bien difficile à réfuter contre l'hypothèse qu'il fût en possession du calcul des fluxions lorsqu'il écrivait ce Chapitre, car il était bien facile de traiter analytiquement le problème. Cette solution et d'autres analogues ont été en effet invoquées par les partisans de Leibniz, notamment par Bernoulli, pour contester à Newton ses droits à l'invention, sans secours étranger, du calcul des fluxions. Mais nous savons que cette contestation n'était pas fondée.

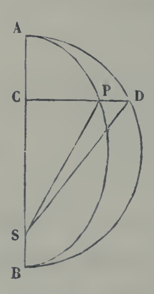
Quoi qu'il en soit, voici à quel biais Newton a recours :

Soient A (*fig.* 9) le point d'où le mobile part sans vitesse, et S le centre d'attraction; si ce mobile avait eu en A une vitesse horizontale, il aurait parcouru une certaine conique ayant son foyer en S. Supposons d'abord que cette conique soit une ellipse APB,

décrivons sur son grand axe le demi-cercle ADB et menons CPD, SP et SD : l'aire ASP sera proportionnelle au temps, mais elle est la projection de ASD sous un angle fixe, donc l'aire ASD sera aussi proportionnelle au temps.

Cela posé, supposons que l'ellipse APB s'aplatisse indéfiniment, son grand axe AB restant constant, mais, par contre, le

Fig. 9.



foyer S se transportant en B, l'aire ASD deviendra ABD, mais n'en restera pas moins proportionnelle au temps.

En construisant donc le point D, d'après le temps écoulé, et menant DC perpendiculaire à AB, on aurait la position C où serait parvenu le mobile, dans le même temps.

Newton examine ensuite les cas où la conique AP serait une hyperbole ou une parabole. On ne voit pas trop pourquoi. Quoi qu'il en soit, il imagine, suivant le cas, soit une hyperbole équilatère, soit une parabole invariable, pour remplir l'office du cercle employé précédemment.

Mais ni le cercle, ni l'hyperbole équilatère, ni la parabole invariable ne pouvaient évidemment fournir une solution satisfaisante, et cela pour bien des raisons qu'il est inutile de déve-

lopper. Aussi Newton transforme-t-il encore la question.

Nous ne voulons pas le suivre dans tous les détails où il entre, parce qu'au lieu de six grandes pages *in quarto* qu'il y emploie, il en faudrait bien au moins douze, pour arriver à quelque clarté, car Newton supprime la moitié des explications qui seraient nécessaires; mais nous reproduirons la solution définitive à laquelle il arrive, parce qu'elle est intéressante au point de vue historique.

Voici la règle telle que Newton l'énonce :

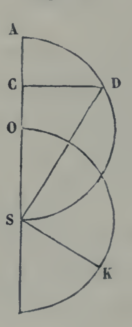
« *Super diametro* AS, *distantiâ corporis a centro sub initio, describe circulum* ADS, *ut et huic æqualem semicirculum* OKH *circa centrum* S. *De corporis loco quovis* C *erige ordinatim applicatam* CD, *junge* SD *et areæ* ASD *æqualem constitue sectorem* OSK. *Patet per Propositionem XXXV quod corpus cadendo describet spatium* AC *eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum* S *gyrando, describere potest arcum* OK. »

C'est-à-dire : Sur la distance initiale AS du corps au centre d'action, décrivez la demi-circonférence ADS, et une demi-circonférence égale, du point S comme centre (*fig.* 10); d'un point quelconque C de la ligne que décrit le mobile, élevez la perpendiculaire CD; joignez SD et formez l'aire OSK égale à l'aire ASD : il est évident par la Proposition XXXV que le corps décrira l'espace AC dans le même temps qu'un autre mobile pourrait mettre à parcourir l'arc OK, en tournant autour du point S d'un mouvement uniforme.

On remarquera que cet énoncé contient une devinette, car Newton ne dit pas avec quelle vitesse le second mobile décrit l'arc OK. Mais les mots *gyrando*, *uniformiter* et surtout *potest*

permettent de trouver le mot de l'énigme : comme le temps pendant lequel un mobile *peut* parcourir un arc de cercle donné est absolument indéterminé, *potest* indique que le second mobile est soumis à l'action d'une force, supposée connue, et dirigée vers S. D'un autre côté, il est à présumer que cette force doit avoir quelque rapport avec celle qui agit sur le premier mobile, avec cette diffé-

Fig. 10.



rence qu'elle soit constante. Ce doit donc être l'attraction exercée par le point S sur ce premier mobile à une certaine distance. Mais quelle doit être cette distance? j'avouerai que j'ai mieux aimé la mettre en équation que de lire entièrement la démonstration de Newton.

Mais commençons par résoudre analytiquement le problème : Soient x la distance du mobile au point S, à l'époque t, comptée à partir du départ en A, et $\frac{k^3}{x^2}$ la force appliquée au mobile à cette époque : la fluxion de la vitesse est donc $-\frac{k^3}{x^2}$, c'est-à-dire que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^3}{x^2};$$

donc

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{k^3}{x^2}\frac{dx}{dt},$$

et, en prenant les fluentes des deux membres,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2k^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right),$$

a désignant la distance AS.

Il en résulte, pour la fluxion du temps par rapport à l'abscisse,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2k^3}}\sqrt{\frac{ax}{a-x}};$$

il ne s'agissait donc que de trouver la fluente de

$$\sqrt{\frac{ax}{a-x}},$$

or Newton a fait des choses plus difficiles dans plusieurs de ceux de ses ouvrages que nous avons analysés plus haut, mais qui ont été publiés postérieurement au *Livre des Principes*.

Quoi qu'il en soit, traduisons maintenant en formule la solution qu'il donne, en suppléant au mot qui manque, c'est-à-dire en désignant par une constante inconnue z la distance dont il a été question plus haut : l'aire ASD, composée de AOD et de ODS, est représentée par

$$\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\arccos\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{ax}{4}};$$

par conséquent l'arc OK est défini par l'équation

$$\frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\text{arc OK} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{4}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4}\,a\sqrt{x(a-x)},$$

d'où

$$\text{arc OK} = \frac{a}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)}.$$

Mais, si t est le temps employé par le second mobile pour parcourir l'arc OK, et que la vitesse du mouvement de ce second mobile soit celle qui, dans le cercle de rayon $\frac{a}{2}$, correspond à l'accélération centripète $\frac{k^3}{z^2}$, laquelle vitesse est déterminée par l'équation

$$\frac{v^2}{\frac{a}{2}} = \frac{k^3}{z^2},$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}},$$

l'arc OK doit être égal à

$$t\sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}};$$

le temps t, que l'on cherche, doit donc être fourni par l'équation

$$t\sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}} = \frac{a}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)},$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{2\zeta^2}{k^3 a}} \left[\frac{a}{2} \text{ arc cos } \frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)} \right];$$

d'un autre côté, la fluxion de t par rapport à x doit être, comme on l'a vu plus haut,

$$-\frac{1}{\sqrt{2k^3}} \sqrt{\frac{ax}{a-x}}.$$

Or cette fluxion, fournie par la formule précédente, serait

$$\sqrt{\frac{2\zeta^2}{k^3 a}} \left[\frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \right)^2}} + \frac{a - 2x}{2\sqrt{x(a-x)}} \right]$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{2\zeta^2}{k^3 a}} \left[\frac{a - 2x}{2\sqrt{x(a-x)}} - \frac{x}{2\sqrt{x(a-x)}} \right],$$

ou simplement

$$-\sqrt{\frac{2\zeta^2}{k^3 a}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Il faut donc poser

$$-\frac{1}{\sqrt{2k^3}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\zeta^2}{k^3}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4\zeta^2}{2k^3}},$$

ou

$$a^2 = 4\zeta^2,$$

c'est-à-dire

$$\zeta = \frac{a}{2}.$$

Ainsi, ce que voulait dire Newton était que *le temps employé par le premier mobile, pour aller de* A *en* C, *serait celui que le second mobile, sollicité vers le point* S *par une force égale à* $\frac{k^3}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, *c'est-à-dire par la force correspondant à la distance* $\frac{a}{2}$, *mettrait à parcourir l'arc* OK.

On voit qu'il n'est pas toujours facile de lire l'illustre auteur du *Livre des Principes*.

La marquise Du Châtelet s'est bornée sur ce point à reproduire l'énoncé de Newton ; voici ce qu'elle dit : « Sur le diamètre AS, distance du corps au centre, dans le commencement de la chute, décrivez le demi-cercle ADS, ainsi que le demi-cercle OKH, qui lui est égal, et qui est décrit autour du centre S. D'un lieu quelconque C du corps, élevez l'ordonnée CD, et faites le secteur OSK égal à l'aire ASD, il est clair, par la Proposition XXXV, que le corps, en tombant par AC, emploiera le même temps qu'il faudrait à un autre corps pour décrire l'arc OK, en tournant uniformément autour du centre S. »

Je ne puis m'empêcher de faire cette autre remarque sur la solution qui précède : Si Newton avait découvert par les moyens qu'il indique la règle à laquelle il est parvenu, on ne saurait trop admirer un tel effort, l'intégration géométrique de

$$dx\sqrt{\frac{ax}{a-x}}$$

dépassant en difficultés tout ce qu'a fait Pascal. Mais si, comme cela est certain, il était déjà en possession du calcul des fluxions et des fluentes, lorsqu'il écrivait son *Livre des Principes*, et qu'ayant obtenu analytiquement la solution dont il s'agit, il ait

cherché, ce qui n'était plus difficile, à y adapter une solution géométrique, loin de le louer, il faudra le blâmer énergiquement.

Au reste, il y a lieu aussi d'admirer l'étroitesse d'esprit qui lui a fait préférer la maigre gloriole d'étonner le public à la gloire immense de fonder le calcul intégral.

Newton passe de là au problème du mouvement rectiligne d'un mobile attiré vers un point fixe par une force variant suivant une loi quelconque, *en supposant la quadrature des courbes*, c'est-à-dire en supposant levées d'avance les plus grandes difficultés.

HUITIÈME SECTION.

De la détermination des orbes que décrivent des corps sollicités par des forces centripètes quelconques.

Ici vient la question du mouvement curviligne d'un mobile animé d'abord d'une vitesse quelconque et soumis à une force dirigée vers un point fixe, mais variant suivant une loi quelconque, *en supposant la quadrature des courbes*.

Nous trouvons là, au milieu d'une solution confuse, que nous ne rapportons naturellement pas, le plus ancien exemple qui ait, croyons-nous, été donné du théorème des forces vives, en dehors du cas de la pesanteur.

Proposition XL.

Si deux corps soumis à la même force, dirigée vers le même point, parcourent des trajectoires différentes, et qu'ils aient eu à des époques quelconques des vitesses égales, à la même distance

du centre d'attraction, ils auront toujours la même vitesse à la même distance de ce point.

Newton suppose l'une des trajectoires rectiligne, mais c'est indifférent.

Soient C (*fig.* 11) le centre d'attraction, A le point de départ du corps qui suit la ligne droite, V celui du corps qui suit une trajectoire courbe VIK : Supposons qu'aux points D et I, situés à la même distance de C, les deux corps aient la même

Fig. 11.

vitesse et considérons deux autres positions infiniment voisines E et K de ces deux corps, à une même distance du point C. En D et I les deux mobiles sont soumis à des forces égales dirigées l'une suivant DC, l'autre suivant IC et qu'on peut représenter proportionnellement par DE et IN. Si l'on mène NT normale à IK, la force IN pourra se décomposer en deux, IT et TN, mais la force TN n'influera pas sur la vitesse du second mobile, dont l'accélération tangentielle sera due seulement à l'action de la force IT.

Cela posé, les accroissements des vitesses des deux mobiles, dans

des temps égaux, seraient proportionnelles à DE et à IT; mais ces deux mobiles ne mettront pas le même temps à parcourir l'un le chemin DE et l'autre le chemin IK, puisqu'ils sont supposés avoir même vitesse en D et en I et que les chemins DE et IK ne sont pas égaux. Ces temps seront dans la raison de DE à IK. L'accroissement de vitesse de I en K sera donc à l'accroissement de vitesse de D en E dans la raison composée des raisons

$$\frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{DE}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{DE}},$$

mais

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{IN}}^2 = \mathrm{IT}.\mathrm{IK},$$

le triangle INK étant rectangle en N; les vitesses croîtront donc autant l'une que l'autre.

Nous dirions aujourd'hui : les travaux des deux forces sont égaux ainsi que les vitesses initiales, il en est donc de même des vitesses finales. Ces travaux sont $\varphi.\mathrm{DE}$ et $\varphi.\mathrm{IN}$, φ désignant la force.

NEUVIÈME SECTION.

Du mouvement des corps dans les orbes mobiles et du mouvement des apsides.

Newton cherche à évaluer (proportionnellement) la force appliquée à un mobile qui décrit autour du centre d'action une orbite (elliptique) qui tourne elle-même autour de ce centre : il compare la force qui ferait parcourir au mobile son orbite, supposée fixe, à celle qui lui fait parcourir son orbite *révolvante;* et cherche la différence de ces deux forces.

Soient VPK (*fig.* 12) l'orbite fixe et *up*K l'orbite révolvante, égale; ces deux orbites sont supposées parcourues suivant la

même loi par les deux mobiles P et p, qui occupent toujours en même temps des positions relatives identiques. Newton suppose de plus que l'angle VCu des grands axes des deux orbites varie proportionnellement à l'angle VCP ou à son égal uCp.

On ne voit pas trop *à priori* d'où vient cette hypothèse, mais elle est nécessaire pour que le théorème des aires s'applique au

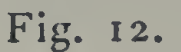
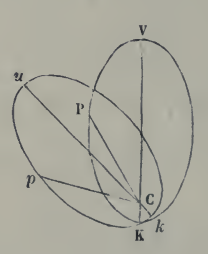


Fig. 12.



mouvement composé du second mobile p, et elle ne s'éloignera pas trop des conditions observées dans les phénomènes astronomiques, toutes les orbites étant à très peu près circulaires et tous les mouvements presque uniformes.

Soient α l'angle variable VCP et $n\alpha$ l'angle VCu, VCp sera donc égal à $(1+n)\alpha = n'\alpha$. Le mouvement angulaire de CP dans un temps dt, est $\frac{d\alpha}{dt}dt$ et l'aire infiniment petite décrite par CP dans le même temps est

$$\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{CP}}^2\,\frac{d\alpha}{dt}\,dt;$$

quant au mouvement angulaire de Cp dans l'espace, il est $n'\frac{d\alpha}{dt}dt$ et l'aire infiniment petite décrite dans le même temps,

est

$$\frac{1}{2}\,\overline{Cp}^2\, n'\,\frac{d\alpha}{dt}\,dt;$$

mais

$$Cp^2 = \overline{CP}^2,$$

donc les aires infiniment petites décrites dans le même temps dt sont entre elles dans le rapport constant $\frac{1}{n'}$; donc il en est de même des aires décrites dans un temps quelconque; et, puisque l'aire décrite par CP est proportionnelle au temps, il en est de même de l'aire décrite par Cp dans l'espace. Donc la force appliquée au mobile p est encore dirigée vers le point C. Mais, dans son mouvement relatif le long de l'ellipse *upk*, supposée immobile, le point p serait soumis à la même force que P, donc la différence des deux forces est celle qui entretiendrait le mouvement de révolution du point p.

Newton calcule cette dernière force au moyen du théorème d'Huyghens et trouve qu'elle est inversement proportionnelle au cube de Cp ou de CP; la démonstration qu'il donne est presque inintelligible; mais elle revient à ces quelques mots très simples : $n\,\frac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire du mouvement de rotation de l'orbite *upk*, et par conséquent du rayon Cp considéré comme fixe dans cette orbite, mais comme entraîné avec elle. La force centripète qui retiendrait le point p dans la trajectoire circulaire qu'il décrirait par suite de cette révolution, serait

$$\frac{v^2}{Cp} = \frac{Cp^2\left(n\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{Cp} = Cp\left(n\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

mais, si C est l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon CP,

$$\frac{1}{2}\overline{CP}^2 \frac{d\alpha}{dt} = C,$$

par conséquent

$$\left(n\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{4n^2C^2}{\overline{Cp}^4};$$

la force cherchée est donc

$$\frac{4n^2C^2}{\overline{Cp}^3}.$$

DIXIÈME SECTION.

Du mouvement d'un corps sur une surface donnée et des oscillations d'un corps suspendu par un fil.

Newton décompose la force qui agit sur le corps en deux, l'une normale à la surface que le corps peut parcourir et l'autre tangentielle, ce qui lui permet d'arriver plus facilement qu'Huyghens aux mêmes résultats et d'étendre même plus loin ses recherches.

Ainsi il substitue au pendule cycloïdal d'Huyghens un pendule épicycloïdal dont la trajectoire serait engendrée par un point d'une circonférence de cercle roulant sur la circonférence et à l'extérieur d'un autre cercle; il suppose que le mobile soit attiré vers le centre du cercle fixe par une force qui varie proportionnellement à la distance et il démontre que les oscillations de ce mobile seront toutes isochrones. Il détermine aussi le temps d'une de ces oscillations.

On repasse au pendule d'Huyghens en supposant au cercle fixe un rayon infini, car alors la force devient constante, en même temps que l'épicycloïde devient une cycloïde.

C'est très beau. Du reste les démonstrations de Newton sont infiniment plus simples que celles de Huyghens.

ONZIÈME SECTION.

Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement.

Les actions des corps les uns sur les autres, dit Newton, sont toujours mutuelles. Quels que soient donc les corps que l'on considère, aucun d'eux ne sera en repos : ils se mouvront de telle sorte que leur centre de gravité soit en repos ou se meuve uniformément en ligne droite.

Proposition LVII.

Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, et autour l'un de l'autre, des figures semblables.

DOUZIÈME SECTION.

Des attractions exercées par des corps sphériques.

Proposition LXX.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une surface sphérique dont toutes les parties égales l'attirent en raison inverse du quarré de la distance, n'éprouve aucune attraction de cette surface. Voici la démonstration de Newton.

Si l'on imagine un cône d'ouverture infiniment petite ayant son sommet au point considéré et qu'on prolonge ce cône dans l'autre sens, les deux surfaces interceptées sur la sphère seront

entre elles comme les quarrés des arêtes des deux cônes, mais les attractions exercées par les éléments égaux des deux surfaces seront en raison inverse des quarrés des mêmes arêtes; donc les actions exercées en sens contraires sur le corpuscule seront égales.

Proposition LXXI.

Si le corpuscule est placé en dehors de la surface sphérique, la force qui agit sur lui est dirigée vers le centre et est inversement proportionnelle au quarré de sa distance à ce point.

La démonstration de Newton est encore fondée sur des considérations purement géométriques.

Proposition LXXIII.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une sphère homogène, dont toutes les parties égales l'attirent en raison inverse du quarré de la distance, tend vers le centre de cette sphère avec une force proportionnelle à la distance qui l'en sépare.

Proposition LXXIV.

Les mêmes choses étant posées, un corpuscule placé hors d'une sphère est attiré vers le centre de cette sphère par une force inversement proportionnelle au quarré de la distance.

Propositions LXXVI et LXXVII.

Deux sphères composées chacune de couches concentriques homogènes s'attirent mutuellement avec une force inversement proportionnelle au quarré de la distance de leurs centres, ou proportionnelle à cette distance, suivant que les éléments s'attirent

eux-mêmes en raison inverse du quarré de leur distance, ou proportionnellement à leur distance.

TREIZIÈME SECTION.

Des forces attractives des corps qui ne sont pas sphériques.

Rien, dans cette section, n'est amené à un point de fini qui permette d'en rendre compte.

QUATORZIÈME SECTION.

Du mouvement des corpuscules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque.

Cette section a pour objet l'établissement des propositions dont Newton se sert dans sa théorie de l'émission. Les corpuscules sont les globules lumineux.

LIVRE SECOND.

Ce Second Livre traite des mouvements des corps dans des milieux résistants et se termine par la réfutation de la doctrine des tourbillons.

On y trouve une exposition rudimentaire des éléments de la théorie des fluxions, mais rien qui se rapporte à la recherche des fluentes, en sorte qu'on ne voit pas à quoi peut servir cette digression, les questions que Newton traite dans ce Livre ressortissant exclusivement au calcul intégral; car les équations différentielles se seraient présentées d'elles-mêmes, toutes préparées. Mais Newton n'y a même pas recours.

Quoi qu'il en soit, nous donnerons une analyse rapide du paragraphe en question, parce qu'il a de l'importance au point de vue historique.

L'intercalation se compose exactement de trois pages dont une grande partie est employée à expliquer ce qu'on doit entendre par *incréments* ou *décréments* de grandeurs variables, qui croissent ou diminuent. Ces différences positives ou négatives seront appelées *moments*.

Si a et b sont les moments de A et de B, le moment de A . B sera $aB + bA$.

Le moment de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} aA^{\frac{m-n}{n}}$.

Celui de $A^3B^4C^2$ est $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$. Mais la démonstration que donne Newton de ce théorème n'est pas très bonne : Si des côtés A et B d'un rectangle on retranche les moitiés des moments des côtés, $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$, le rectangle devient

$$AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab;$$

si, au contraire on ajoute aux deux côtés les moitiés des mêmes moments, le rectangle devient

$$AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab.$$

Si l'on retranche les nouveaux rectangles, il reste

$$aB + bA,$$

qui est l'incrément du rectangle, produit par les incréments entiers a et b des côtés.

Cette démonstration suggère plusieurs remarques : Et d'abord les singulières dispositions que prend Newton pour arriver à un incrément exact du rectangle A.B montrent qu'il n'a pas conçu, comme Leibniz, la rigueur absolue de la méthode qui consiste à négliger les infiniments petits d'ordres supérieurs, par rapport aux autres.

De plus, sa démonstration est un véritable escamotage, car, dans la pratique, l'incrément dont on aura besoin sera

$$(A + a)(B + b) - AB$$

et non pas

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right).$$

Enfin il y a tromperie à simuler la possibilité d'étendre le théorème tel qu'il est établi, relativement à l'expression (A.B), aux autres expressions monômes. Quels seraient en effet les incréments qu'il faudrait faire prendre aux A qui entrent dans

$$A^{\frac{m}{n}}$$

pour obtenir exactement, pour cette expression, l'incrément

$$\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}.$$

Considérons seulement l'expression A.B.C à laquelle Newton applique sa règle de proche en proche, mais sans démonstration. Supposons qu'on voulût y voir clair : après avoir donné à A et à B respectivement les deux demi-incréments

$$+\frac{1}{2}a \text{ et } -\frac{1}{2}a, \qquad +\frac{1}{2}b \text{ et } -\frac{1}{2}b,$$

ce qui fournirait pour AB l'incrément

$$aB + bA,$$

il faudrait ensuite donner à AB et à C respectivement les deux demi-incréments

$$\frac{1}{2}(aB + bA) \text{ et } -\frac{1}{2}(aB + bA), \qquad \frac{1}{2}c \text{ et } -\frac{1}{2}c.$$

Mais auparavant il faudrait revenir en arrière et supposer qu'on eût commencé par donner à A et B respectivement les incréments

$$\frac{1}{4}a \text{ et } -\frac{1}{4}a, \qquad \frac{1}{4}b \text{ et } -\frac{1}{4}b,$$

afin de parvenir à l'incrément $\frac{1}{2}(aB + bA)$; et recommencer pour obtenir l'incrément $-\frac{1}{2}(aB + bA)$, etc. Tout cela est pitoyable.

« Le moment de $\frac{1}{A}$ est $-\frac{a}{A^2}$, parce que

$$A \times \frac{1}{A} = 1$$

et que, par conséquent,

$$\text{moment } A \times \frac{1}{A} + A \times \text{moment } \frac{1}{A} = 0,$$

d'où

$$\text{moment } \frac{1}{A} = -\frac{\text{moment } A}{A^2} = -\frac{a}{A^2}. \text{ »}$$

Nous revenons aux questions traitées dans le second Livre.

Newton, suivant son habitude, aborde une foule de questions

insolubles que nous n'énoncerons même pas, mais dont voici un spécimen : la résistance éprouvée par un corps pesant étant supposée proportionnelle au quarré de sa vitesse et à la densité du milieu conjointement, on demande, la trajectoire étant assignée à l'avance et quelconque, ce que doivent être la densité du milieu en chaque point de cette trajectoire et la vitesse du mobile.

Nous nous bornerons à l'analyse de quelques-unes des questions que Newton résout entièrement.

Supposant d'abord que la résistance du milieu soit proportionnelle à la vitesse. il examine les trois cas où le corps n'étant soumis à l'action d'aucune autre force, son mouvement est forcément rectiligne, où le corps a une vitesse initiale verticale et est soumis à l'action de la pesanteur, enfin où le corps, pesant, a une vitesse initiale quelconque.

Dans le premier cas, l'équation du mouvement, en prenant pour axe des x la droite que décrit le mobile, est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,\frac{dx}{dt},$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Sous sa première forme, elle donne immédiatement

$$\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -k(x - x_0),$$

ou

$$v - v_0 = -k(x - x_0),$$

mais Newton ne pose l'équation ni, à plus forte raison ne l'intègre; voici ce qu'il dit :

« Le mouvement perdu pendant chaque particule du temps étant comme la vitesse, c'est-à-dire comme le chemin parcouru durant cette particule du temps, le mouvement perdu pendant le temps total sera comme le chemin total. »

Le mouvement perdu est la perte de vitesse, c'est $v_0 - v$, et il est en effet proportionnel à l'espace parcouru $x - x_0$. Mais le raisonnement ne vaut pas l'intégration.

Sous sa seconde forme l'équation donne de même

$$dt = -\frac{1}{k}\frac{dv}{v},$$

d'où

$$t = -\frac{1}{k}\,\mathrm{L}\,\frac{v}{v_0},$$

si l'on compte le temps à partir du départ.

Voici ce que dit Newton (je cite le texte de Mme du Châtelet, vérifié comme on sait par Clairault) : « Soit divisé le temps en particules égales et soit supposée au commencement de chacune de ces particules une force résistante qui soit comme la vitesse et qui agisse par un seul coup (ceci est imité de Galilée); le décrément de la vitesse, à chacune de ces particules de temps, sera comme cette vitesse, car les vitesses sont continuellement proportionnelles à leurs différences. Donc si d'un nombre égal de particules on compose des temps quelconques égaux, les vitesses au commencement (il aurait fallu le pluriel) de ces temps seront comme les termes d'une progression continue pris par sauts, en omettant un nombre égal de termes intermédiaires. Or, les raisons de ces termes, pris par sauts, sont composées des raisons que les termes intermédiaires ont entre eux, lesquelles sont les mêmes, et les vitesses proportionnelles à ces termes sont en progression

géométrique. Maintenant soient diminuées ces particules égales de temps, et soit leur nombre augmenté infiniment, en sorte que l'impulsion de la résistance devienne continue ; et les vitesses qui sont toujours en proportion continue dans les commencements des temps égaux le seront encore dans ce cas. »

On pourra dire que Newton n'était pas obligé de savoir que la fluxion de $\mathrm{L}x$ est $\frac{1}{x}$. Mais ce ne serait pas exact, car il a parfaitement dit, plus tard, que celle de l'aire d'une courbe, par rapport à l'abscisse, est l'ordonnée ; il a donc su que la fluxion de l'aire de l'hyperbole

$$xy = 1,$$

par rapport à l'abscisse, est y ou $\frac{1}{x}$, et, d'un autre côté, il savait, par Mercator, que cette aire est le logarithme de x.

Au reste Newton trouve parfaitement que le temps est l'abscisse d'une hyperbole dont l'aire est la vitesse, au moyen du théorème de Grégoire de Saint-Vincent.

Newton traite ensuite la question du mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse. L'équation différentielle du mouvement est dans ce cas, en supposant que le corps descende,

$$\frac{dv}{dt} = g - kv,$$

mais, bien entendu, Newton ne l'écrit pas. Elle donne

$$dt = \frac{dv}{g - kv} = -\frac{1}{k}\frac{kdv}{kv - g}$$

d'où

$$t = -\frac{1}{k}\mathrm{L}\,(kv - g) + \text{const.},$$

et l'on obtient ensuite l'espace parcouru par une exponentielle.

Newton ne fait pas les intégrations, mais il arrive néanmoins aux résultats, par des considérations analogues à celles qui précèdent.

Il traite par les mêmes moyens la question du mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu qui résiste proportionnellement au quarré de la vitesse.

Enfin il aborde le problème du mouvement d'un projectile pesant, animé d'une vitesse initiale quelconque, dans les deux cas de résistance.

TROISIÈME LIVRE.

Sur le système du monde.

Nous avons déjà dit qu'il nous serait impossible de rendre complètement compte de cette partie, la plus importante cependant du *Livre des Principes*, parce qu'elle ne se compose que de précis de démonstrations qu'au reste on ne pourrait même pas aujourd'hui présenter d'une manière bien rigoureuse, puisque, pour un certain nombre des questions proposées, où les astres seraient considérés comme exactement sphériques, on aboutirait au problème des trois corps (ou d'un plus grand nombre de corps), et que, pour les autres, où il faudrait tenir compte des aplatissements, on se heurterait à des évaluations d'attractions impossibles à faire.

Newton a assigné avec sa sagacité ordinaire les raisons de tous les mouvements observés, c'est-à-dire la nature et la provenance des forces en jeu. Mais ses calculs ne fournissent que des premières approximations, qu'il a fallu corriger plus tard, tant bien que mal, et qu'on ne complètera jamais.

Nous nous bornerons donc, ce qui suffira à la gloire de Newton, à résumer les explications générales par lesquelles il débute, avant d'entrer dans les calculs. Au reste nous aurons plus tard l'occasion de revenir sur ces calculs à propos des corrections qui y ont été apportées depuis.

Newton commence par constater, d'après les observations, que les satellites de Jupiter et de Saturne se meuvent, par rapport à ces planètes, comme s'ils étaient attirés par elles en raison inverse du quarré de la distance, les cubes des demi-diamètres principaux de leurs orbites étant comme les quarrés des temps des révolutions.

Cette raison est bonne. Newton y ajoute cette autre raison que les orbites sont à peu près circulaires et les vitesses à peu près constantes; ce qui ne vaut rien, car on ne pourrait rien conclure de là si ce n'est qu'il n'y a pas contradiction.

Il reproduit les mêmes constatations relativement aux six planètes alors connues (la Terre comprise) considérées comme satellites du Soleil.

De là il conclut le principe de la gravitation universelle.

Proposition VIII.

Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distances de leurs centres, le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres.

Il serait difficile de se douter, d'après cet énoncé, que cette proposition, démontrée dans le Premier Livre, est la plus importante du troisième.

Newton ne la rappelle, sans aucune addition à la démonstration

déjà fournie, que pour trouver l'occasion d'en tirer, dans les corollaires, la solution du grand problème des masses et des densités des principaux corps qui composent notre système planétaire.

Voici textuellement ces corollaires.

Corollaire I. — « Par là on peut trouver les poids des corps sur diverses planètes et les comparer entre eux, car les poids des corps égaux qui font leurs révolutions dans des cercles autour des planètes sont, par le corollaire II de la Proposition IV du Livre I, comme les diamètres de ces cercles directement et les quarrés des temps périodiques inversement.

« Ainsi le temps périodique de Vénus autour du Soleil étant de $224^j 16^h \frac{3}{4}$; celui du satellite le plus éloigné de Jupiter autour de cette planète, de $16^j 16^h \frac{8}{15}$; le temps périodique du satellite d'Huyghens autour de Saturne, de $15^j 22^h \frac{2}{3}$; et celui de la Lune autour de la Terre, de $27^j 7^h 43^m$: j'ai trouvé, en employant ces temps périodiques et, de plus, la distance médiocre de Vénus au Soleil, la plus grande élongation héliocentrique du satellite de Jupiter le plus éloigné de cette planète au centre de Jupiter, qui est de 8′ 16″, celle du satellite d'Huyghens au centre de Saturne, qui est de 3′4″ et celle de la Lune au centre de la Terre qui est de 10′33″, qu'à égale distance, les poids des corps égaux vers les centres du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre sont comme

$$1, \quad \frac{1}{1067}, \quad \frac{1}{3021} \quad \text{et} \quad \frac{1}{169\,282}$$

respectivement.

« A des distances inégales, ces poids varient en raison renversée du quarré des distances : par exemple, les poids de corps égaux placés sur les surfaces du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la

Terre dont les rayons sont proportionnels à

$$10\,000, \quad 997, \quad 791 \quad \text{et} \quad 109,$$

seraient comme

$$10\,000, \quad 943, \quad 5229 \quad \text{et} \quad 435;$$

on dira dans la suite ce que les corps pèsent à la surface de la Lune.

Corollaire II. — « On connaîtra aussi la quantité de matière que contient chaque planète. Car les quantités de matière dans les planètes sont comme leurs forces attractives à égales distances de leurs centres, c'est-à-dire que les quantités de matière du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre sont comme

$$1, \quad \frac{1}{1067}, \quad \frac{1}{3021} \quad \text{et} \quad \frac{1}{169\,282},$$

respectivement. Si l'on trouve la parallaxe du Soleil plus grande ou plus petite que 10″30‴, il faudra augmenter ou diminuer la quantité de matière de la Terre en raison triplée.

Corollaire III. — « On connaîtra aussi les densités des planètes, car les poids de corps égaux et homogènes aux surfaces de sphères homogènes étant comme leurs diamètres, les densités des sphères homogènes sont comme ces poids divisés par leurs diamètres. Donc, en vertu de ce qui précède, les densités du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre sont comme

$$100, \quad 94\tfrac{1}{2}, \quad 67 \quad \text{et} \quad 400.$$

« La Lune est plus dense que la Terre comme on le verra dans la suite. »

Newton revient sur ce sujet dans son *Système du Monde*, qui

ne fut publié que bien postérieurement au *Livre des Principes;* mais il n'y est pas beaucoup plus clair.

Voici ce que je trouve au n° 13 de ce traité qui n'est qu'un abrégé du Troisième Livre des *Principes*, ce qui nous autorisera à n'en plus parler.

« La distance du satellite (dont il s'agit) de Jupiter à la planète est à la distance de Jupiter au Soleil comme

124 est à 52012,

et à la distance de Vénus au Soleil, comme

124 est à 7234;

et les temps périodiques (du satellite et de Vénus) sont

$16^j\frac{3}{4}$ et $224^j\frac{2}{3}$.

« De là on conclut, par le second corollaire de la quatrième proposition, en divisant les distances par les quarrés des temps, que la force par laquelle le satellite est poussé vers Jupiter est à la force par laquelle Vénus est tirée vers le Soleil comme

442 est à 143;

et en diminuant la force qui sollicite le satellite en raison doublée de la distance 124 à la distance 7234, on trouvera que l'attraction de Jupiter, à la distance de Vénus au Soleil, est à l'attraction exercée par le Soleil sur Vénus, comme

$\frac{13}{100}$ est à 143:

c'est-à-dire qu'à la même distance l'attraction du Soleil est 1100 fois plus grande que celle de Jupiter.

« On trouverait de la même manière, d'après le temps périodique du satellite de Saturne, lequel est de $15^j 22^h \frac{2}{3}$, et de sa plus grande élongation par rapport à Saturne, lorsqu'il est à sa moindre distance de nous, laquelle est de $3' 20''$, que la distance de Saturne à son satellite est à la distance du Soleil à Vénus comme

$$92\tfrac{2}{3} \text{ est à } 7234;$$

et que, par conséquent, la force attractive du Soleil est 2360 fois plus grande que celle de Saturne à la même distance. »

Newton passe de même à la détermination de la masse de la Terre, au moyen du temps périodique de la Lune et de la distance qui nous sépare de notre satellite.

Clairault n'est pas plus clair dans son commentaire sur le Troisième Livre des *Principes;* voici ce qu'il dit :

« M. Newton cherche, dans la Proposition VIII du Livre III, ce que pèserait le même corps sur les différentes planètes et il le trouve en faisant usage du Corollaire II de la Proposition IV du Livre I, dans lequel il a fait voir que les poids des corps égaux qui circulent dans des cercles sont comme les diamètres de ces cercles directement, et comme les quarrés de leurs temps périodiques inversement; donc, connaissant les temps périodiques de Vénus autour du Soleil, des satellites de Jupiter autour de cette planète, des lunes de Saturne autour de Saturne, et de la Lune autour de la Terre, et les distances de ces corps aux centres autour desquels ils tournent; et supposant que ces corps décrivent des cercles dans leurs révolutions, ce qui peut se supposer dans le cas dont il s'agit, on trouve quel serait le poids du même corps transporté successivement à la même distance du centre du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre. »

L'obscurité du texte de Newton, obscurité que Clairault a laissée subsister, je ne sais pourquoi, tient à plusieurs causes : la première, que les énoncés, comme au reste les considérants, renferment des éléments inutiles à connaître ; la seconde, que Newton ne veut absolument énoncer que des proportions et se refuse toujours à formuler des égalités ; la troisième et la principale, qu'il manque en réalité quelque chose d'essentiel à la théorie, et que Newton ne veut ni en convenir, ni le laisser deviner, ce à quoi il serait forcément arrivé en s'exprimant plus clairement.

Newton a parfaitement établi que le mouvement elliptique d'un corps, sous la condition de la proportionnalité aux temps des aires décrites par le rayon vecteur mené au mobile de l'un des foyers de la trajectoire, entraîne comme conséquence que ce mobile soit soumis à l'action d'une force dirigée vers ce même foyer et variant en raison inverse du quarré de la distance.

Il a aisément pu constater que les forces accélératrices qui animent plusieurs corps célestes tournant autour d'un même astre, beaucoup plus considérable qu'eux, seraient égales si on les rapportait à la même distance.

Mais il n'avait aucun moyen de reconnaître, d'une façon précise, si l'unité de masse prise dans le Soleil, dans l'une des planètes, ou dans un de leurs satellites, exercerait la même attraction, à la même distance, sur une même masse, de nature déterminée. Il fallait en effet pour mettre ce principe hors de doute, une assez longue pratique, dans toutes sortes de circonstances, directes et inverses, de l'hypothèse de la gravitation universelle; et un accord constant des résultats fournis par le calcul avec les observations.

Newton suppose le fait, mais il ne veut pas énoncer l'hypothèse.

Sa démonstration devient très claire dès qu'on rétablit les sous-entendus, qu'on écrit les équations, et qu'on supprime les données inutiles.

La force, dirigée vers le centre, qui retient un corps dans une orbite circulaire, qu'il parcourt uniformément, est, pour l'unité de masse,

$$j = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

r désignant le rayon du cercle, v la vitesse du mobile, ω sa vitesse angulaire et T le temps d'une révolution entière.

Dans l'hypothèse où l'accélération j du mobile est le poids, à la distance r, de l'unité de masse du mobile, sur l'astre qui occupe le centre du cercle, comme ce poids est d'ailleurs exprimé par

$$\frac{fM}{r^2},$$

M désignant la masse du corps attirant et f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, on a donc (en considérant comme des cercles les ellipses effectivement décrites)

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{fM}{r^2},$$

quels que soient le corps attirant et le corps attiré.

Cela posé, cherchons par exemple le rapport des masses du Soleil et de Jupiter : soient M la masse du Soleil, R la distance de cet astre à Vénus et T le temps de la révolution de Vénus autour du Soleil, on aura donc

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{fM}{R^2}.$$

Soient de même m la masse de Jupiter, r la distance de cette planète au satellite dont parle Newton et t le temps de la révolution de ce satellite autour de Jupiter, on aura aussi

$$\frac{4\pi^2}{t^2} r = \frac{fm}{r^2};$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2;$$

ou, en prenant les nombres donnés par Newton, savoir

$$r = 124, \quad R = 7234, \quad t = 16^j \tfrac{3}{4} \quad \text{et} \quad T = 224^j \tfrac{2}{3},$$

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{7234}{124}\right)^3 \left(\frac{16\frac{3}{4}}{224\frac{2}{3}}\right)^2,$$

ce qui effectivement donne à peu près

$$\frac{M}{m} = 1100.$$

Il reste cependant à observer qu'on ne voit pas pourquoi Newton, dans cette recherche, suppose les mouvements circulaires : il ne lui eût pas été beaucoup plus difficile de les prendre tels qu'ils sont. Nous verrons en effet par la Proposition XV qu'il savait parfaitement que la force, ramenée à l'unité de distance, qui retient une planète dans son orbite, est donnée par la formule

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Proposition X.

Les mouvements des planètes peuvent se conserver très longtemps.

Si ce n'est pas prouvé pour l'avenir, ce l'est du moins pour le passé. Mais un très long temps ne paraît pas un temps très bien défini, et la proposition pouvait, sans inconvénient, rester dans l'encrier.

Proposition XI.

Le centre commun de gravité du Soleil, de la Terre et de toutes les planètes est en repos.

Ce n'est pas très certain.

Au reste voici le raisonnement de Newton : car ce centre ou sera en repos, ou sera mu uniformément en ligne droite. Mais si ce centre avançait toujours, le centre du monde ne serait donc pas en repos, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour être juste, il faut ajouter qu'il vient de faire cette hypothèse.

Proposition XII.

Le Soleil est toujours en mouvement, mais il s'éloigne très peu du centre de gravité commun.

Newton dit que : si la Terre et toutes les planètes étaient d'un même côté du Soleil, le centre commun de gravité s'éloignerait à peine du centre du Soleil d'un demi-diamètre de cet astre.

Proposition XIII.

Les planètes se meuvent dans des ellipses qui ont un de leurs foyers au centre du Soleil et les aires décrites autour de ce centre sont proportionnelles aux temps.

Newton s'exprime ainsi pour reproduire les lois de Képler, mais il ajoute que, s'il en est sensiblement ainsi, c'est qu'on peut

négliger les actions mutuelles de tous ces corps et principalement la réaction de chaque planète sur le Soleil.

« Toutefois l'action de Jupiter sur Saturne n'est pas négligeable. L'excentricité de Saturne est tantôt augmentée tantôt diminuée, lors de ses conjonctions avec Jupiter; son aphélie avance ou recule selon les cas, et son moyen mouvement est tantôt accéléré, tantôt retardé.

« Les actions de Saturne sur Jupiter sont moins sensibles.

« L'orbite de la Terre est sensiblement dérangée par l'action de la Lune. Le centre commun de gravité de la Terre et de la Lune décrit autour du Soleil une ellipse dont cet astre occupe l'un des foyers et les aires décrites par ce centre sont proportionnelles au temps. La Terre fait sa révolution autour du même centre dans un mois. »

Proposition XIV.

Les aphélies et les nœuds des orbites sont en repos, si, comme précédemment, on néglige les effets à peine sensibles des causes perturbatrices. Toutefois, si les planètes Vénus, Mercure, la Terre et Mars sont beaucoup trop petites pour que leurs actions mutuelles soient appréciables, elles subissent d'autre part les actions de Jupiter, de Saturne et *des autres corps placés au-dessus d'elles*. Leurs aphélies se meuvent un peu, en conséquence, et l'on trouve, dit Newton, par la théorie de la gravité (mais il n'entre à cet égard dans aucune explication) que les mouvements de ces aphélies sont en raison sesquiplée des distances au Soleil des planètes correspondantes : 33′20″ pour Mars en cent ans, 17′40″ pour la Terre, 10′53″ pour Vénus, et 4′16″ pour Mercure.

Proposition XV.

Trouver les diamètres principaux.

Il faut prendre les diamètres en raison sesquiplée des temps périodiques, mais, pour tenir compte de ce que le Soleil n'est pas absolument fixe, comme on l'avait supposé d'abord (dans le Premier Livre), il faut augmenter le diamètre de chacun des orbes dans la raison marquée par la première des deux moyennes proportionnelles entre la somme des masses de la planète et du Soleil et la masse du Soleil.

Newton ne donne aucune explication à cet égard, mais quand on traite la question en tenant compte à la fois de l'action du Soleil sur chaque planète et de la réaction de la Planète sur le Soleil, on trouve, en désignant par a le grand axe de l'orbite de la planète, par T le temps de sa révolution, par m sa masse, et par M la masse du Soleil,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{M + m}{M} k,$$

k désignant une constante. Il en résulte

$$a = T^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{m}{M}}.$$

C'est bien ce que donne la règle de Newton, car la première des deux moyennes proportionnelles dont il parle est

$$\sqrt[3]{M(M+m)^2},$$

et la raison dans laquelle il faut, d'après lui, augmenter le diamètre principal de l'orbe est

$$\frac{M+m}{\sqrt[3]{M(M+m)^2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{\frac{M+m}{M}}.$$

Proposition XVI.

Trouver les excentricités et les aphélies des orbes. Il ne s'agit que d'une construction.

Proposition XVII.

Les mouvements diurnes des planètes sont uniformes et la libration de la Lune vient de son mouvement diurne.

Les temps des révolutions, par rapport aux étoiles sont pour

Jupiter	$9^h 56^m$.
Mars	$24^h 39^m$.
La Terre	$23^h 56^m$.
Vénus	23^h.
Le Soleil	$25^j \frac{1}{2}$.
La Lune	$27^j 7^h 43^m$.

La Lune présente toujours la même face à la Terre, à la différence près qui résulte de l'excentricité de son orbite, différence qui occasionne la libration en longitude. Quant à la libration en latitude, elle dépend de la latitude de la Lune et tient à l'inclinaison de son axe sur le plan de l'écliptique.

Les satellites des autres planètes paraissent comme la Lune présenter toujours les mêmes faces aux planètes qu'elles accompagnent.

Proposition XVIII.

Les axes des planètes sont moindres que les rayons de leurs équateurs.

Proposition XIX.

Déterminer le rapport des axes d'une planète. Newton trouve,

par la considération d'un canal liquide formé de deux branches dirigées l'une suivant le rayon polaire, l'autre suivant un rayon équatorial, que le rapport des deux rayons, pour la Terre, est celui de

$$19\,573\,000 \text{ à } 19\,658\,600.$$

S'il s'agit d'une autre planète, la différence des rayons, dit Newton, variera en raison doublée, à peu près, de celle dans laquelle aura varié la vitesse de rotation; d'un autre côté, la même différence variera en raison inverse de celle dans laquelle aura varié la gravité (à la surface de la planète), Newton trouve ainsi que le rayon polaire et le rayon équatorial de Jupiter sont comme

$$9\tfrac{1}{3} \text{ à } 10\tfrac{1}{3},$$

à peu près.

Proposition XXI.

Les points équinoxiaux rétrogradent et l'axe de la Terre, à chaque révolution annuelle, a une nutation par laquelle il s'incline deux fois vers l'écliptique et retourne deux fois à sa première position.

Proposition XXII.

Tous les mouvements de la Lune et toutes ses inégalités se déduisent des principes posés précédemment.

Proposition XXIII.

Les inégalités des mouvements des satellites de Jupiter et de Saturne sont analogues à celles des mouvements de la Lune.

Proposition XXIV.

Le flux et le reflux de la mer sont causés par les actions de la Lune et du Soleil.

La mer doit s'abaisser et s'élever deux fois chaque jour tant solaire que lunaire, et la plus grande élévation de l'eau dans les mers libres et profondes doit suivre de moins de six heures le passage de l'astre au méridien du lieu.

L'action du Soleil ou de la Lune pour élever les eaux de la mer est la plus forte au moment du passage de l'astre au méridien; mais, la force continuant d'agir, le maximum de l'effet n'a lieu qu'un certain temps après, trois heures environ.

Les mouvements produits par les deux astres se composent en un seul. Leurs effets s'ajoutent dans les syzygies et se retranchent dans les quadratures.

Les actions exercées par le Soleil et la Lune dépendent encore de leurs distances à la Terre. Elles sont maximums aux périgées et minimums aux apogées.

Ces actions dépendent encore des déclinaisons des deux astres; elles atteignent leurs maximums lorsque les astres se trouvent dans l'équateur et leurs minimums lorsqu'ils s'en écartent le plus.

Enfin elles dépendent aussi de la latitude du lieu d'observation.

Newton reviendra plus loin sur les Propositions XXI, XXII, XXIII et XXIV.

Proposition XXV.

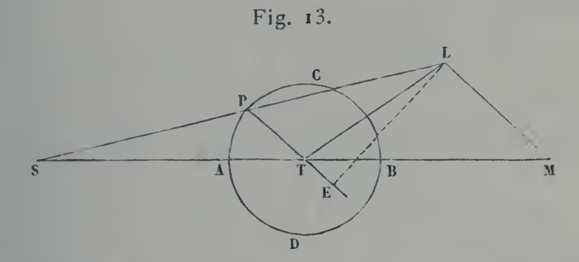
Trouver la force avec laquelle le Soleil trouble le mouvement de la Lune.

Soient (*fig.* 13) S le Soleil, T la Terre, P la Lune, CADB l'orbite de notre satellite : si l'on prend TS pour représenter l'action du Soleil sur l'unité de masse de la Terre, la droite qui représentera la force accélératrice du Soleil sur la Lune sera fournie par la proportion.

$$X : TS :: \overline{ST}^2 : \overline{SP}^2.$$

Soit LS cette longueur, et menons LM parallèle à PT. La force LS est la résultante de MS et de LM ; d'ailleurs MS se com-

Fig. 13.



pose de TS et de MT. La Terre et la Lune sont donc soumises à une même force représentée par TS, laquelle ne tend pas à changer leurs situations relatives, et la Lune est, en plus, soumise aux forces MT et LM qui troublent le mouvement que lui imprimerait l'attraction de la Terre.

Proposition XXVI.

Trouver l'incrément horaire de l'aire que la Lune décrit autour de la Terre, en supposant son orbite circulaire.

Les forces LM et MT (*fig.* 13) ont pour résultante LT, qui se décompose elle-même orthogonalement en LE et ET, mais l'action de ET n'influe pas sur le mouvement angulaire de la

Lune autour de la Terre. Reste donc l'action de LE, dont Newton calcule approximativement l'effet.

Désignons par d la distance de la Terre au Soleil, par r le rayon de l'orbite de la Lune, supposée circulaire : la force accélératrice avec laquelle la Terre tend vers le Soleil est

$$\frac{f.\mathrm{M}}{d^2}.$$

C'èst cette force que Newton représente par TS; la force qu'il représente par LS est, par suite,

$$\mathrm{LS} = \frac{f.\mathrm{M}}{d^2}\,\frac{d^2}{\overline{\mathrm{SP}}^2} = \frac{f.\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{SP}}^2},$$

la force LM s'obtiendra par la proportion

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LS}} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{SP}} = \frac{r}{\mathrm{SP}};$$

on aura donc

$$\mathrm{LM} = \frac{f.\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{SP}}^2}\,\frac{r}{\mathrm{SP}} = \frac{f.\mathrm{M}.r}{\overline{\mathrm{SP}}^3};$$

quant à la force MT, elle est la différence des forces MS et TS, mais

$$\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{LM}} = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{TP}} = \frac{d}{r};$$

par conséquent,

$$\mathrm{MS} = \frac{f.\mathrm{M}.r}{\overline{\mathrm{SP}}^3}\,\frac{d}{r} = \frac{f.\mathrm{M}.d}{\overline{\mathrm{SP}}^3},$$

de sorte que

$$\mathrm{MT} = \mathrm{MS} - \mathrm{TS} = \frac{f.\mathrm{M}.d}{\overline{\mathrm{SP}}^3} - \frac{f.\mathrm{M}}{d^2}.$$

Cela posé, la force LE est la projection de MT sur une perpendiculaire à TP.

Représentons donc par ω l'angle BTP, nous aurons pour LE l'expression

$$\text{LE} = \text{MT} \sin\omega = f\,\text{M}\left(\frac{d}{\overline{\text{SP}}^3} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega;$$

enfin, dans le triangle STP, où les côtés TS et TP, qui sont d et r, comprennent entre eux l'angle $\pi - \omega$,

$$\overline{\text{SP}}^2 = d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega;$$

par conséquent, en résumé,

$$\text{LE} = f\,\text{M}\left(\frac{d}{(d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega.$$

Cette force LE, qui est appliquée à la Lune, est dirigée tangentiellement à l'orbite de notre satellite, tandis que les deux autres forces sont dirigées suivant le rayon de l'orbite : elle agit donc seule pour modifier la vitesse de la Lune. On pourrait donc écrire, en désignant par v la vitesse de la Lune dans son orbite,

$$\frac{dv}{dt} = f\,\text{M}\left(\frac{d}{(d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega.$$

Mais, si l'on désigne par θ l'angle décrit effectivement par le rayon TP, depuis la Nouvelle Lune précédente,

$$v = r\,\frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

d'un autre côté, si l'on désigne par αt l'angle décrit aussi depuis la Nouvelle Lune précédente par le rayon ST,

$$\theta = \omega + \alpha t,$$

d'où

$$\omega = \theta - \alpha t,$$

l'équation à intégrer serait donc

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} = f\,\mathrm{M}\left[\frac{d}{[d^2+r^2+2dr\cos(\theta-\alpha t)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right]\sin(\theta-\alpha t).$$

Mais Newton ne cherche même pas la formule de la force LE, dont il avait si heureusement aperçu la prépondérance dans la question qu'il traite et dont nous avons voulu obtenir la formule pour montrer quelle difficulté analytique il eût fallu surmonter pour obtenir la solution intégrale du problème.

Les autres questions que Newton aborde dans sa théorie de la Lune présentent des difficultés tout aussi considérables. C'est pourquoi j'ai cru pouvoir dire qu'il n'avait certainement pas fait les intégrations nécessaires.

Quant aux calculs arithmétiques que j'ai supposé qu'il avait pu faire, ils ne présenteraient certainement pas des difficultés insurmontables : par exemple, si, pour traiter la question qui nous occupe actuellement, on divisait en un assez grand nombre de parties égales le temps compris entre deux syzygies successives, on pourrait, dans chacun des intervalles, considérer le mouvement en question de la Lune comme uniformément accéléré; l'accélération de ce mouvement angulaire, au commencement du premier intervalle de temps, étant nulle, puisque θ et t seraient alors nuls, on calculerait l'angle θ_1 décrit dans ce premier intervalle

de temps, au moyen de la vitesse initiale $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$; ayant θ_1, on connaîtrait l'accélération j_0 du mouvement au commencement du second intervalle de temps; on aurait donc l'angle θ_2 décrit pendant le second intervalle de temps, et la vitesse $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1$ au moyen des formules

$$\theta_2 = \frac{d\theta}{dt}t + \frac{1}{2}j_0t^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 + j_0 t;$$

et l'on continuerait de même.

J'imagine que c'est par des considérations de ce genre que Newton a pu faire, à propos de toutes les questions qu'il traite, les calculs dont il donne les résultats. Dans la question présente, au moins, il est certain qu'il a employé à peu près cette manière de procéder, quoiqu'il ne s'explique pas très clairement. Voici en effet sa conclusion, que je prends dans la traduction de Mme du Chatelet.

« Donc l'aire que la Lune décrit autour de la Terre à chaque partie égale du temps, est à peu près comme la somme du nombre 219,46 et du sinus verse du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature, dans un cercle dont le rayon est l'unité. »

Proposition XXVII.

Trouver la distance de la Lune à la Terre, au moyen du mouvement horaire de la Lune.

Proposition XXVIII.

Trouver les axes de l'orbite que la Lune devrait décrire, si elle était sans excentricité (par rapport à la Terre).

Cet énoncé n'est pas clair, Newton suppose que les conditions

de la Lune soient telles que, si le Soleil ne troublait pas son mouvement, elle décrirait un cercle autour de la Terre et il cherche la déformation que l'action perturbatrice du Soleil devrait imprimer à cette orbite. L'hypothèse est parfaitement raisonnable puisque, pour qu'elle se trouvât réalisée, il suffirait que la vitesse de la Lune, dans son mouvement produit par l'action de la Terre, à l'un des moments où cette vitesse est perpendiculaire à la ligne qui joint les deux astres, satisfît à la condition

$$j = \frac{v^2}{r},$$

r désignant la distance de la Lune à la Terre à ce moment, et j la gravité à la distance r.

Cela posé, en se reportant à la *fig.* 13, on peut aisément se rendre compte des variations de la force perturbatrice du Soleil.

Dans les quadratures, SP étant égal à ST, le point L coïncide avec le point P et le point M avec le point T, à très peu près, à cause de la grande distance du Soleil, de sorte que la force MT est nulle et qu'il ne reste que LM, qui est alors représentée par le rayon CT de l'orbite lunaire.

Dans la conjonction ou l'opposition, c'est LM qui est nulle et il ne reste que MT qui elle-même se réduit à LS — ST. Or dans la conjonction, c'est-à-dire lorsque la Lune est en A,

$$\mathrm{LS} : \mathrm{ST} :: \overline{\mathrm{ST}}^2 : \overline{\mathrm{SA}}^2,$$

par conséquent LS est plus grand que ST et le point M, qui se confond alors avec L, est à droite du point T, la force perturbatrice est donc dirigée de la Lune vers le Soleil et la Lune pèse moins vers la Terre que si le Soleil n'existait pas.

Dans l'opposition, au contraire, c'est-à-dire lorsque la Lune est en B,

$$LS : ST :: \overline{ST}^2 : \overline{SB}^2,$$

par conséquent LS est moindre que ST et le point M, qui se confond encore avec L, est à gauche du point T; la force perturbatrice est donc dirigée du Soleil vers la Lune et la Lune pèse encore moins sur la Terre que si le Soleil n'existait pas.

En résumé la gravité de la Lune vers la Terre est plus grande dans les quadratures que dans les syzygies.

Si donc on pouvait supposer la vitesse de la Lune à peu près constante, la formule

$$jr = v^2$$

montrerait que le rayon de courbure r de l'orbite doit être moindre dans les quadratures que dans les syzygies, puisque l'accélération j est plus grande dans le premier cas que dans le second, on en conclurait que l'orbite, dans chaque lunaison, doit avoir son grand axe dirigé dans le sens des quadratures et son petit axe dans le sens des syzygies.

Ce n'est pas ainsi qu'opère Newton. Du reste, il tient compte du changement de vitesse de la Lune : il trouve que les distances de la Lune à la Terre, dans les syzygies et dans les quadratures, sont à peu près dans le rapport de

$$69\tfrac{1}{24} \text{ à } 70\tfrac{1}{24},$$

toujours dans l'hypothèse où l'action de la Terre sur la Lune ne lui aurait imprimé qu'un mouvement circulaire uniforme.

On remarquera que cette théorie convient absolument aux marées.

Proposition XXIX.

Trouver la variation de la Lune.

Cette inégalité est la différence qui existe entre l'angle que le rayon mené de la Terre à la Lune aurait dû parcourir en raison de sa vitesse moyenne et celui qu'il parcourt effectivement. Cette variation, observée par Tycho-Brahé, acquiert son maximum dans les octants; elle provient de l'aplatissement de l'orbite de la Lune dans le sens du diamètre passant par deux syzygies consécutives et de l'inégalité qui en résulte dans la vitesse aréolaire de l'astre.

Newton trouve 35′ 10″ pour la valeur maximum de cette variation, en négligeant les influences secondaires.

Propositions XXX, XXXI, XXXII et XXXIII.

Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune, 1° dans une orbite circulaire, 2° dans une orbite elliptique; trouver le mouvement moyen et le mouvement vrai des nœuds de la Lune.

La force LM (*fig.* 13) reste toujours dirigée dans le plan de l'orbite lunaire et ne peut avoir d'effet sur la direction de ce plan; c'est la force MT qui peut en changer la situation par rapport au plan de l'écliptique, c'est-à-dire influer à la fois sur la direction de l'intersection des deux plans, ou de la ligne des nœuds de la Lune, dont il est question dans les quatre propositions XXX à XXXIII et sur l'inclinaison des deux plans, dont il sera parlé dans les deux propositions suivantes.

Soient S le Soleil, T la Terre et P la Lune; soient d'ailleurs, au moment où la Lune est en P, NPA*n*B son orbite idéale, N*n*

désignant la ligne des nœuds : la force perturbatrice MT (*fig.* 13), dont nous nous occupons, est parallèle à TS, elle fera donc parcourir à la Lune (*fig.* 14) un chemin P′P″ parallèle à TS, pendant que cet astre parcourrait le chemin PP′, en vertu de l'action seule de la Terre. La Lune suivra donc le chemin PP″.

Cela posé, l'élément P′P prolongé ira rencontrer la ligne des

Fig. 14.

nœuds en un point H, puisque ces deux droites sont dans le plan de l'orbite; quant à l'élément P″P, si on le prolonge, il ira rencontrer le plan de l'écliptique en K et le point K appartiendra à la nouvelle position de la ligne des nœuds qui, ainsi, deviendra TK.

La ligne des nœuds aura donc tourné de l'angle HTK. Or P′P″ et HK sont dans un même plan (celui du triangle PP′P″) mais P′P″ étant parallèle au plan de l'écliptique (puisqu'elle est parallèle à TS) ne peut pas rencontrer HK (qui est dans le plan de l'écliptique). P′P″ et HK sont donc parallèles et les deux triangles PP′P″ et PHK sont semblables; il en résulte

$$HK : HP :: P'P'' : PP',$$

proportion qui donne HK. On conçoit donc qu'on puisse calculer l'angle HTK parcouru par la ligne des nœuds dans le temps que mettrait la Lune à parcourir l'arc PP′, si elle se mouvait en vertu seulement de l'action de la Terre.

Proposition XXXIV.

Trouver la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique.

Proposition XXXV.

Trouver pour un temps donné l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique.

Propositions XXXVI et XXXVII.

Ces propositions ont pour objet la théorie des marées. Cette théorie, nous l'avons déjà fait remarquer, est la même que celle de la Proposition XXV. La mer pèse moins sur la Terre lorsque l'astre perturbateur, la Lune ou le Soleil, est dans le méridien que lorsqu'il est dans l'horizon.

Proposition XXXVIII.

Trouver la figure de la Lune.

De même que la Lune élève la surface de la mer du côté qui la regarde et du côté opposé, la Terre aussi élèverait la surface de la Lune, si notre satellite était fluide; la Lune doit donc avoir pris, dès le commencement, la forme d'un sphéroïde allongé dont le grand axe passe par le centre de la Terre; et c'est la raison pour laquelle elle nous présente toujours la même face; elle forme

comme un immense pendule pour lequel la position d'équilibre est celle où le grand axe est dirigé vers la Terre.

Nous avons suivi Newton, dans sa théorie de la Lune, aussi longtemps qu'il nous a été possible, c'est-à-dire tant que la route était éclairée. Il s'occupe encore de rechercher différentes inégalités de notre satellite, mais les explications qu'il donne alors ne sont véritablement plus intelligibles.

Ces explications, au reste, se réduisent presque toujours à des affirmations conçues toutes dans une même formule : « J'ai trouvé, par la théorie de la gravité, que ... », or, je ne sache pas qu'il en ait été donné de commentaires satisfaisants.

Voici ce qu'en pensait Clairaut :

« M. Newton, après avoir exposé la méthode par laquelle il calcule celle des inégalités de la Lune appelée sa variation, et la méthode qu'il suit pour déterminer le mouvement des nœuds et la variation de l'obliquité (de l'orbite) sur l'écliptique, rend compte de ce qu'il dit avoir tiré de sa théorie de la gravitation par rapport aux autres inégalités de la Lune. Mais il s'en faut bien que ce qu'il donne alors puisse être aussi utile aux géomètres que ce qu'il a dit auparavant par rapport aux inégalités dont je viens de parler.

« Dans l'examen des premières inégalités, quoique le lecteur ne soit pas extrêmement satisfait à cause de quelques suppositions et de quelques abstractions faites pour rendre le problème plus facile, il a du moins cet avantage qu'il voit la route de l'auteur et qu'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se flatter d'aller plus loin. Mais, quant à ce qui regarde le mouvement de l'apogée et la variation de l'excentricité, et toutes les

autres inégalités du mouvement de la Lune, M. Newton se contente des résultats qui conviennent aux astronomes » (Clairaut veut sans doute dire : obtenus par les astronomes) « et il assure que sa théorie de la gravité l'a conduit à ces résultats.

« M. Horrox, célèbre astronome anglais, avait prévenu M. Newton sur la partie la plus difficile des mouvements de la Lune, sur ce qui regarde l'apogée et l'excentricité. On est étonné que ce savant, dénué des secours que fournissent le calcul et le principe de l'attraction, ait pu parvenir à réduire des mouvements si composés sous des lois presque semblables à celles de M. Newton, et ce dernier, si respectable d'ailleurs, paraît d'autant plus blâmable, en cette occasion, d'avoir caché sa méthode, qu'il s'exposait à faire croire que ses théorèmes étaient, comme ceux des astronomes qui l'avaient précédé, le résultat de l'examen des observations, au lieu d'être une conséquence qu'il eût tirée de son principe général. »

Proposition XXXIX.

Trouver la précession des équinoxes.

Nous avons vu que l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune produit entre autres effets la rétrogradation de la ligne des nœuds de notre satellite. Concevons la sphère décrite sur la ligne des pôles terrestres comme diamètre et considérons une petite partie de la portion de la Terre comprise entre cette sphère idéale et la surface ellipsoïdale vraie de notre globe. Cette particule, si elle était libre, formerait une très petite Lune tournant autour de la ligne des pôles terrestres, mais elle subirait, de la part du Soleil, une action perturbatrice ayant entre autres effets celui de faire rétrograder la ligne de ses nœuds.

Si l'on étend la même analogie à toutes les parties qui composent le bourrelet terrestre compris en dehors de la sphère décrite sur la ligne de ses pôles et qu'on rétablisse la liaison qui existe entre elles, en laissant leur ensemble, c'est-à-dire le bourrelet, indépendant du reste de la Terre, on verra que ce bourrelet aurait autour de la ligne des pôles, dans le sens rétrograde, un mouvement propre par suite duquel la ligne des nœuds de son équateur, dans l'écliptique, tournerait comme la ligne des nœuds de l'orbite lunaire.

Que l'on rétablisse ensuite la liaison entre le bourrelet et la partie sphérique de la Terre, il est évident que ce bourrelet sera retardé dans son mouvement par le reste du globe, mais lui communiquera une petite partie de son mouvement rétrograde.

Ces quelques mots contiennent une explication très simple et très lumineuse du phénomène de la précession des équinoxes. Newton y ajoute les démonstrations de ces théorèmes très remarquables de Géométrie : 1° *Si les particules composant le ménisque terrestre compris entre la surface du globe et celle de la sphère décrite sur la ligne des pôles, étaient portées à s'éloigner du plan mené par le centre de la Terre perpendiculairement à la droite qui joint ce centre à celui du Soleil, par des forces proportionnelles à leurs distances à ce plan : celles de ces particules qui sont situées dans le plan de l'équateur auraient, pour faire tourner la Terre autour de l'intersection des deux plans, une force moitié de celle qu'elles exerceraient si elles étaient accumulées au point de l'équateur le plus éloigné du plan prédéfini ;* 2° *Toutes les particules composant le même ménisque, situées tant dans le plan de l'équateur qu'en dehors, exerceraient sur la Terre pour la faire tourner autour du même axe,*

une force égale aux deux cinquièmes de celle avec laquelle elles agiraient si elles étaient rapportées dans le plan de l'équateur; 3° *Le mouvement de la Terre autour de l'axe dont il s'agit serait au mouvement de l'anneau constitué par le ménisque, rabattu sur l'équateur, dans la raison composée du poids de la Terre au poids de l'anneau et de celle de trois fois le quarré du quart d'un cercle à deux fois le quarré du diamètre de ce cercle.*

Il est remarquable que pour établir ces propositions, Newton se sert du théorème de Roberval que, *si l'on suppose une demi-circonférence de cercle divisée en un nombre infini de parties égales, la somme des quarrés des sinus des arcs allant de l'une des extrémités de la demi-circonférence à tous les points de division sera égale à la somme des quarrés d'autant de rayons du cercle.*

La fin du Troisième Livre est consacrée à la théorie des comètes, théorie que Newton créa en quelque sorte, mais qu'il ne put qu'ébaucher.

Jusqu'à Newton, le mouvement des comètes avait toujours été considéré comme n'obéissant à aucun gouvernail. Newton soumit ces astres aux lois de la gravitation universelle.

Il nous resterait à parler d'un dernier Ouvrage scientifique de Newton, sa *Théorie de la Lune*, qui n'a été publiée que beaucoup plus tard. Mais nous n'y avons trouvé qu'une reproduction abrégée de ce qu'il avait dit, dans le Troisième Livre des *Principes*, sur notre satellite.

Nous n'avons trouvé, dans les œuvres de Newton, ni la méthode pour obtenir les limites des racines des équations algébriques, par la considération des dérivées; ni la méthode pour

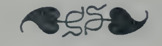
approcher de la véritable valeur d'une racine, déjà séparée. Il est probable que ces deux méthodes se trouvent indiquées dans sa correspondance, éparse dans différents recueils.

Il nous resterait encore à parler de deux lettres adressées par Newton, en juin et octobre 1676, à Oldenbourg, pour être communiquées à Leibniz, et qui lui parvinrent en effet. Mais comme ces deux lettres ont été invoquées en faveur de Newton, à l'occasion de sa querelle avec Leibniz au sujet de l'invention du calcul infinitésimal, et que d'ailleurs elles avaient été provoquées par des lettres antérieures de celui-ci, elles trouveront plus naturellement leur place dans la biographie de Leibniz.

Nous nous bornerons ici à répéter ce que nous avons déjà dit : qu'elles établissent bien nettement qu'en 1676 Newton était déjà en possession de sa méthode des fluxions, parce qu'il y a inséré les anagrammes de phrases relatives à cette méthode, et que ces anagrammes s'accordent parfaitement avec la traduction qui en a été donnée à l'occasion du procès.

Nous ajouterons seulement qu'elles n'avaient aucune valeur juridique dans le litige, puisque Newton avait caché ce qu'il affirmait qu'on lui avait emprunté.

Quant au contenu de ces lettres, nous n'y avons rien vu d'important qui ne se trouve dans les autres Ouvrages de Newton; en sorte qu'elles ne peuvent servir qu'à établir les dates de quelques-unes de ses inventions analytiques.



DŒRFEL (GEORGES, SAMUEL).

[Né à Plauen (Voigtland) en 1643, mort à Weida en 1688.]

Pasteur luthérien. Il s'adonna spécialement aux études astronomiques : il observa l'un des premiers la fameuse comète de 1680, la suivit dans son mouvement, du 22 novembre à la fin de janvier, assigna assez approximativement sa distance périhélie, et, ayant reconnu que sa trajectoire se confondait, à très peu près, avec une parabole dont le Soleil occupait le foyer, il fit de cette importante observation la base d'une théorie générale qu'il publia sous le titre de *Etude astronomique des grandes comètes*. (1681.)

Hévélius avait bien reconnu antérieurement que les orbites des comètes ont leur concavité tournée vers le Soleil, et avancé l'hypothèse du mouvement parabolique; mais Dœrfel est non seulement le premier astronome qui ait justifié cette hypothèse, mais aussi le premier qui ait eu l'idée de placer au Soleil le foyer commun des trajectoires de toutes les comètes. Cette découverte de Dœrfel est d'autant plus méritoire que les astronomes du temps, Cassini entre autres, voyaient le plus souvent deux astres différents dans une même comète, observée avant et après son passage au périhélie. Dœrfel eut, sous ce rapport, à combattre un préjugé établi, en opposition directe avec toute possibilité de progrès ultérieur.

« Le livre des *Principes* n'ayant paru qu'en 1686, on ne saurait contester à Dœrfel, dit l'historien de l'Académie de Berlin, sinon la primauté, du moins l'égalité d'invention. » L'observation est juste, mais Newton ne se borna pas à la vérification du fait : il en donna l'explication.

« Si cette découverte se trouve juste, dit Dœrfel en terminant

son *Etude*, il ne sera pas difficile à ceux qui sont exercés dans les sections coniques d'indiquer des méthodes de calcul pour la théorie des comètes, pour trouver la distance du sommet au foyer solaire, et, par conséquent, le rapport du mouvement diurne dans la trajectoire, la distance à la Terre, etc. »

L'Ouvrage de Dœrfel n'avait fait aucune sensation lorsqu'il parut, et était devenu extrêmement rare ; ce n'est qu'en 1745 que le nom de l'auteur a été tiré de l'oubli.

RŒMER (OLAUS).

(Né à Aarhuus en 1644, mort à Copenhague en 1710.)

Il fut initié aux Mathématiques par Erasme Bartholin. Il avait été chargé, jeune encore, de classer les manuscrits de Tycho-Brahé. Picard, qui s'était rendu en Danemark en 1671 pour relever la position géographique d'Uranibourg, se trouva naturellement mis en relation avec lui ; il l'employa dans ses recherches et le décida à le suivre en France, où il lui fit obtenir la charge de professeur de Mathématiques du dauphin. Leur amitié se perpétua sans le moindre nuage jusqu'à la mort de Picard.

Rœmer entra bientôt à l'Académie des Sciences et en fut l'un des membres les plus illustres. Rappelé en Danemark en 1681, il y fut chargé d'occuper la chaire de Mathématiques à l'Université, devint bientôt après directeur des monnaies, inspecteur des arsenaux et des ports, conseiller d'Etat (1707), enfin premier magistrat de Copenhague. Il avait visité en 1687 l'Allemagne, l'Angleterre, la France et la Hollande, avec la mission d'y étudier les

arts et les manufactures. Il mourut de la pierre, dont il souffrit cruellement pendant les trois dernières années de sa vie.

Ses principaux titres sont la découverte de la vitesse de la lumière et l'invention de la lunette méridienne. Il s'était longtemps occupé de trouver une preuve directe du mouvement de la Terre dans les parallaxes annuelles qu'il supposait pouvoir reconnaître au moins aux étoiles de première grandeur. Ces parallaxes, dont on n'a même pas encore pu aujourd'hui constater authentiquement l'existence, seraient en tout cas bien inférieures aux limites des erreurs que comportaient forcément les observations, au temps de Rœmer.

Le manuscrit du seul Ouvrage que nous ayons de Rœmer a été sauvé par Horrebov de l'incendie qui détruisit l'observatoire de Copenhague le 20 octobre 1728. Tous les autres papiers de Rœmer furent consumés; les instruments qu'il avait fait construire furent totalement détruits.

Horrebov habitait un corps de bâtiment éloigné de celui où le feu avait pris; il fit échapper ses huit plus jeunes enfants et resta avec sa femme et son fils aîné pour tâcher de préserver tout ce u'il pourrait des livres, des instruments et des manuscrits. Il ne parvint à enlever qu'un grand portefeuille contenant l'Ouvrage dont nous allons parler. Horrebov venait de perdre tous ses effets, tous ses meubles; néanmoins, dans son malheur, il se félicita d'avoir pu arracher au feu l'œuvre capitale de son maître.

Le manuscrit de Rœmer n'était pas prêt pour l'impression; Horrebov le compléta et le fit paraître en 1736 sous le titre: *Basis Astronomiæ*.

Picard, Auzout, Huyghens venaient seulement d'imaginer les premiers micromètres. Voici, suivant Horrebov, comment Rœ-

mer s'y prenait pour construire le sien : « Il roulait un fil de laiton autour d'un fil de fer un peu plus gros, en portant la plus grande attention pour empêcher que, dans cette opération, les fils ne se tournassent et ne se courbassent en aucun sens, afin que partout ils fussent bien parallèles entre eux. Il soudait l'hélice ainsi formée à un cercle de laiton; ensuite, quand il voulait placer les fils dans un micromètre, il en retranchait, à intervalles égaux, un, ou deux, ou trois de suite. »

Pour graduer les cercles de ses instruments, il marquait des divisions arbitraires, mais exactement égales, sauf à en déterminer ensuite le rapport au degré. Il est, en effet, plus facile de porter des distances égales sur une ligne indéterminée que d'en diviser une, donnée de longueur, en parties égales.

Pour lire les divisions sur le limbe, il se servait d'un microscope mobile autour de l'axe de ce limbe et portant à son foyer onze fils également espacés, qui formaient une sorte de vernier.

Picard avait eu le premier l'idée de substituer les observations méridiennes, qui sont les plus sûres, à celles qu'on faisait auparavant dans tous les verticaux. Rœmer avait particulièrement apprécié les motifs de Picard; il l'avait aidé à établir son cercle mural à l'Observatoire de Paris; il fit construire pour l'Observatoire de Copenhague la première lunette méridienne qu'on ait eue. Elle n'était pas telle qu'on les construit aujourd'hui, mais se rapprochait davantage du cercle mural, l'axe horizontal autour duquel elle tournait entraînant dans son mouvement une alidade mobile sur un cercle vertical, de manière à fournir les hauteurs méridiennes des astres à leurs passages.

Dans un Chapitre intitulé : *Terra mota*, *sive parallaxis orbis annui*, *ex observationibus Sirii et Lyræ*, Rœmer dit : « Les

phénomènes s'expliquent également dans les systèmes de Copernic et de Tycho. La parallaxe seule pourrait fournir une preuve réelle (du mouvement de la Terre). La comparaison de mes obser vations à celles d'Hévélius m'a fait croire quelquefois à une parallaxe d'une minute ou deux; mais j'ai vu qu'il était toujours possible d'attribuer les différences aux erreurs des observations. J'ai repris ce travail en 1692 et 1693, et je me flatte que c'est avec plus de succès. Il m'a paru que la parallaxe des étoiles de première grandeur ne dépasse pas une minute. Je puis dire que la somme des parallaxes de Sirius et de la Lyre passe une minute. » Il se trompait évidemment. Mais ses observations ont au moins servi à constater l'immensité de la distance qui nous sépare des étoiles. Au reste, les soins minutieux que Rœmer devait prendre pour déterminer, s'il y avait lieu, les parallaxes annuelles des étoiles l'ont mis sur la voie d'une autre découverte qu'il n'eut pas à la vérité le temps de compléter, mais à laquelle il ne doit pas être considéré comme entièrement étranger; nous voulons parler de l'aberration des étoiles. « Il se trouve, dit-il au même Chapitre, des variations dans les déclinaisons qui ne dépendent ni des réfractions ni des parallaxes, mais qu'il faut attribuer sans doute à quelque vacillation du globe terrestre, dont j'espère que je pourrai donner une théorie appuyée d'observations. » L'explication n'était pas bonne, mais la constatation du fait restait, et elle n'a pas été inutile à l'élaboration de la théorie de Bradley.

La plus belle découverte de Rœmer avait été faite en France. L'*Histoire de l'Académie* la rapporte en ces termes : « Le 22 novembre 1675, M. Rœmer lut une dissertation sur la propagation de la lumière. Il prouva par les immersions et les émer-

sions (des satellites de Jupiter dans le cône d'ombre projeté par la planète) que cette propagation n'est pas instantanée. »

En 1695, Rœmer, présentant au roi Christian V l'almanach de l'année, lui fit remarquer les inconvénients de conserver encore le Calendrier julien. Le roi le chargea de s'entendre avcc la Suède pour l'adoption de la réforme grégorienne. Cette négociation n'aboutit pas; mais le roi suivit l'avis de Rœmer pour ses Etats. Le mois de février 1710 n'eut en Danemark que 18 jours.

Rœmer, pendant son séjour en France, avait eu à subir des attaques violentes et absurdes de la part de La Hire. Cassini, qui gouvernait l'Académie à cette époque, se montra également injuste envers lui. Ces tracasseries ont probablement été pour beaucoup dans la détermination qu'il prit de rentrer dans sa patrie.

C'est Rœmer qui reconnut le premier que les profils des dents des engrenages cylindriques doivent affecter la figure d'épicycloïdes. La Hire s'empara de l'idée, mais sans nommer Rœmer, et ce détournement fut sans doute l'origine de sa haine contre l'astronome danois.

Newton et Jean Bernoulli, l'un dans le *Livre des Principes*, l'autre dans les *Leçons de calcul intégral*, s'occupèrent de la rectification et de la quadrature de ces courbes.



MAYOW (JEAN).

(Né dans le comté de Cornouailles en 1645, mort à Londres en 1679.)

Il pratiqua la médecine à Bath et à Londres. La Société royale l'admit au nombre de ses membres en 1678. Il fit une étude par-

ticulière de la respiration. Il enseignait qu'une partie de l'air, qu'il appelle sel vital, s'unit aux molécules sulfureuses du sang pour l'en débarrasser; que c'était cette combinaison qui artérialisait le sang veineux et que la respiration était la source de la chaleur animale.

« L'air, dit-il dans son *Tractatus quinque physico-medici quorum primus agit de sale nitro et spiritu nitro-aereo; secundus de respiratione;* etc. (Oxford, 1674), est tout à fait nécessaire à l'entretien de la flamme; toutefois ce n'est pas l'air tout entier qui entretient la flamme, c'est sa partie la plus active et la plus mobile; car, lorsqu'une flamme s'éteint dans un espace fermé, il reste encore beaucoup d'air qui n'a pas été détruit par la combustion. »

Ces judicieuses remarques passèrent inaperçues. Voici encore quelques passages éminemment remarquables :

« Bien que l'esprit de nitre (c'est le sel vital) ne provienne pas en totalité de l'air, il faut cependant admettre qu'une partie en tire son origine. D'abord, on m'accordera qu'il existe quelque chose d'aérien nécessaire à l'alimentation de la flamme, car l'expérience démontre qu'une flamme exactement emprisonnée dans une cloche ne tarde pas à s'éteindre, non pas, comme on le croit communément, par l'action de la suie qui se produit, mais par privation d'un élément aérien. Dans un verre où l'on a fait le vide, il est impossible de faire brûler, au moyen d'une lentille, les substances même les plus combustibles. Mais il ne faut pas s'imaginer que l'élément igno-aérien soit tout l'air lui-même; non : il n'en constitue qu'une partie, la partie, il est vrai, la plus active. D'un autre côté, il faut aussi admettre que les particules igno-aériennes se trouvent également engagées dans le sel de

nitre, car un mélange de soufre et de nitre peut très bien être enflammé sous une cloche vide d'air, et ce sont alors les particules igno-aériennes du nitre qui font brûler le soufre. De même, dans la déflagration du nitre, les particules nitro-aériennes deviennent libres par l'action du feu et entretiennent la combustion du charbon.

« Dans la combustion produite par les rayons solaires (sous une cloche) ce sont les particules nitro-aériennes qui interviennent exclusivement ; l'antimoine ainsi traité augmente de poids ; il n'est pas concevable que cette augmentation de poids puisse provenir d'autre chose que des particules igno-aériennes fixées pendant la calcination.

« L'usage de la respiration consiste en ce que, par le ministère des poumons, certaines particules absolument nécessaires au maintien de la vie animale, sont séparées de l'air et mêlées à la masse du sang; quant à l'air expiré, il a perdu quelque chose de son élasticité. »

MM. Gaubert et Ledru ont donné en 1840 une traduction française des œuvres de Mayow.



LÉMERY (NICOLAS).

(Né à Rouen en 1645, mort à Paris en 1715.)

Fils d'un procureur au parlement de Normandie qui appartenait à la religion réformée, Nicolas Lémery fut élevé dans les principes du protestantisme. Ses études terminées, il entra chez un de ses oncles, pharmacien à Rouen, qui lui enseigna les premiers principes de la Chimie et la pratique de la Pharmacie.

Mais la Science pure avait pour Nicolas plus d'attraits que les manipulations des apothicaires; aussi ne tarda-t-il pas à abandonner l'officine du pharmacien pour le laboratoire du chimiste.

Il vint à Paris et suivit d'abord les leçons de Christophe Glazer, qui occupait alors la chaire de Chimie au Jardin du roi. Mais Glazer était encore voué aux croyances alchimiques; il professait des idées obscures, mystiques, où l'imagination avait plus de part que la vraie Science. De plus il était d'un caractère peu sociable, toutes causes qui ne contribuaient guère à lui attirer des élèves. Après deux mois d'une fréquentation assidue, Lémery quitta Christophe Glazer et se mit à voyager. Arrivé à Montpellier, il entra en qualité d'aide chez l'apothicaire Verchout, où il resta trois ans. Durant ce temps, il eut la libre disposition du laboratoire de son maître. Pour subvenir aux besoins de chaque jour, il enseignait la Science qu'il cultivait avec tant d'ardeur. Parmi les jeunes étudiants de la Faculté de Médecine, il recruta un certain nombre d'élèves, et bientôt ses leçons acquirent dans Montpellier une grande notoriété, ce qui lui permit d'exercer quelque temps la Médecine sans être muni du diplôme de docteur. Après avoir parcouru toute la France, il revint à Paris en 1672. A cette époque se tenaient dans la capitale des conférences scientifiques qui, dit M. Cap (*Études biographiques*), « étaient comme autant d'Académies secondaires, où les jeunes savants et les étrangers venaient exposer les doctrines nouvelles et essayer leurs talents. » Les plus renommées et les plus fréquentées étaient celles de Justel, secrétaire du roi, de Bourdelot, médecin du prince de Condé. Lémery s'étant fait admettre dans ces réunions eut occasion de faire connaître sa science, qui était déjà fort étendue. Il noua en même temps des relations qui eurent sur la suite

de sa carrière la plus heureuse influence. Il se lia successivement avec l'illustre botaniste Tournefort, le savant Régis, Duverney, Gui Patin, etc. Bourdelot mit à la disposition de Lémery le laboratoire qu'il possédait dans l'hôtel du prince de Condé. Là, les leçons brillantes qu'il fit devant un auditoire d'élite valurent à Lémery de nombreux succès et particulièrement l'amitié et l'estime du célèbre vainqueur de Rocroi, qui l'admit dans son intimité. Ayant ouvert un laboratoire rue Galande, Lémery se fit recevoir apothicaire et ouvrit des cours publics dans cette rue. Dès le premier jour, il y eut foule à ses leçons : des étudiants, des dames, des grands seigneurs, des savants même, comme Rohault, Bernier, Régis, Tournefort, accoururent entendre Lémery. Ce qui faisait surtout le succès de ses leçons, c'était la façon neuve et originale dont il enseignait la Chimie. « La Chimie jusque-là, dit M. Cap, n'avait jamais été enseignée de bonne foi; quelque chose d'obscur et de mystique, dernières traces de l'alchimie des siècles précédents, était toujours mêlé à ses préceptes et semait d'entraves réelles les abords de cette science. » Lémery porta la lumière au sein de ce chaos; il dissipa l'obscurité des faits et du langage, et sacrifia résolûment le merveilleux au vrai. En même temps qu'il enseignait, Lémery exerçait la profession d'apothicaire; et là encore le succès vint couronner ses efforts. Fontenelle, dans l'éloge qu'il a fait de Lémery, nous apprend que les drogues qui sortaient de ses mains jouissaient, dans Paris, d'une vogue inouïe. On peut citer, entre autres, son fameux magistère de bismuth, l'émétique doux et l'opiat mésentérique, tous médicaments dont la préparation était connue de lui seul, et avec lesquels il faisait des cures merveilleuses.

Lors de la réaction religieuse qui devait aboutir à la révocation

de l'édit de Nantes, Lémery dut se défaire de sa charge d'apothicaire. L'électeur de Brandebourg lui fit offrir immédiatement une place de chimiste à la cour de Berlin; mais il refusa et alla chercher un refuge en Angleterre. Là, il fut accueilli avec beaucoup d'égards par le roi Charles II; mais, prévoyant des troubles en Angleterre, il revint en France, et, vers 1683, se fit recevoir docteur à la Faculté de médecine de Caen.

A Paris, où il revint s'établir, il ne put exercer la Médecine que jusqu'en 1685, époque à laquelle la révocation de l'édit de Nantes interdit cette profession aux protestants. Il fit alors des cours de Chimie, donna des leçons aux frères du marquis de Seignelay et à lord Salisbury.

Puis, protestant trop peu convaincu pour sacrifier plus longtemps son intérêt à sa foi, il abjura le protestantisme et reprit de plein droit l'exercice de la Médecine et l'exploitation de sa boutique d'apothicaire. En 1699, il succéda à Bourdelin, à l'Académie des Sciences, comme associé chimiste. Il mourut en 1715, foudroyé par une attaque d'apoplexie.

Lémery s'est moins fait connaître par des travaux nouveaux et par des découvertes que par sa manière d'exposer la Chimie.

Il s'est occupé particulièrement des sels extraits des végétaux, des encres sympathiques, des poisons, de la préparation des médicaments et des produits pharmaceutiques tirés de l'antimoine. Dans ses recherches sur les sels des végétaux, Lémery signala un des premiers la distinction qu'il convient de faire entre la voie sèche et la voie humide dans la Chimie végétale. Il pensait avec raison que, dans les expériences chimiques, des degrés de chaleur différents conduisent à des résultats différents. Aussi recommanda-t-il l'emploi du fourneau à réverbère, l'insolation, les

bains de sable, de limaille de fer, de cendres, de fumier, de marc de raisin, de chaux vive, etc.

Comme plusieurs autres chimistes, Lémery avait constaté que l'étain et le plomb augmentent de poids par la calcination; mais, n'ayant fait aucune expérience à ce sujet, il avait, infidèle en ce cas à la méthode expérimentale, expliqué ce phénomène par une théorie fantaisiste.

Il fit également servir la chimie à l'explication des phénomènes géologiques et météorologiques. Au moyen d'un appareil ingénieux connu sous le nom de *volcan de Lémery*, il rendait compte des volcans et des tremblements de terre : c'était un mélange en parties égales de limaille de fer et de soufre pulvérisé, qui, disposé en forme conique, puis humecté d'eau, s'échauffait graduellement et finissait par s'enflammer.

Pour expliquer le phénomène du tonnerre et de l'éclair, il imagina une expérience qui le conduisit à trouver « la vapeur qui s'élève du mélange de fer, d'huile de vitriol et d'eau, et qui s'enflamme au contact d'une bougie allumée », vapeur qui n'est autre chose que l'hydrogène.

Lémery s'est beaucoup occupé de la préparation des diverses encres sympathiques, qui, de son temps, étaient pour le public un objet de pure curiosité. Il indique notamment celle qui est formée par la dissolution du plomb dans l'eau-forte ou du bismuth dans le vinaigre.

Il a aussi étudié avec soin les poisons minéraux et végétaux, ainsi que les venins des animaux venimeux; par exemple : l'arsenic, le sublimé corrosif, la ciguë, l'aconit napel, le venin de la vipère et du scorpion.

L'histoire des préparations antimoniales a été faite par Lémery

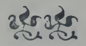
avec une clarté fort remarquable. Il remarque que l'antimoine naturel est composé de soufre et d'une substance fort approchante d'un métal, qu'il nomme *stibium*. Il connaît donc parfaitement le sulfure d'antimoine, forme sous laquelle on rencontre l'antimoine dans la nature.

La présence du fer dans les cendres des végétaux a été signalée pour la première fois par Lémery. Pour mettre ce métal en évidence, il se servait d'un couteau aimanté qu'il promenait dans la masse des cendres, et il voyait ainsi toutes les particules du fer s'attacher à la lame.

Il existe peu d'ouvrages scientifiques qui aient obtenu un succès aussi éclatant que le *Cours de Chimie* de Nicolas Lémery. Il parut pour la première fois à Paris en 1675, sous ce titre : *Cours de Chimie, contenant la manière de faire les opérations qui sont en usage dans la médecine, par une méthode facile, avec des raisonnements sur chaque opération, pour l'instruction de ceux qui veulent s'appliquer à cette Science*. De 1675 à 1730, ce livre n'eut pas moins de douze éditions à Paris; la meilleure, revue par Baron, a été publiée en 1756. A Amsterdam, à Leyde, à Bruxelles, on en publia d'autres éditions françaises. Pendant longtemps, le livre de Lémery fut le seul guide des pharmaciens et des chimistes. Il fut traduit en anglais (Londres, 1677, 1686, 1698, 1720); en allemand (1698); en latin (Genève, 1681); en italien (Venise, 1763), et enfin en espagnol.

Les autres ouvrages de Lémery sont : *Pharmacopée universelle* (Paris, 1694); *Dictionnaire universel des drogues simples* (Paris, 1698); *Traité de l'antimoine* (Paris, 1707), traduit en allemand par Malhern (Dresde, 1709); *Recueil nouveau des secrets et curiosités les plus rares* (Amsterdam, 1709, 2 vol.). Lémery a

publié, en outre, dans le *Recueil de l'Académie des Sciences*, divers mémoires très importants : *Observation sur une extinction de voix guérie par les herbes vulnéraires* (1700) ; *Note sur une fontaine pétrifiante des environs de Clermont en Auvergne* (1700) ; *Explication physique et chimique des feux souterrains, des tremblements de terre, des ouragans, des éclairs et du tonnerre* (1700); *Examen chimique des eaux de Passy* (1701); *Observations sur le camphre et sa purification* (1701); *Sur un sel ammoniac naturel trouvé près du Vésuve* (1701); *Examen de l'eau minérale de Vézelay, en Bourgogne* (1701); *Examen de l'eau de Carensac* (1701); *Observations sur le miel et son analyse* (1706); *Examen d'une eau minérale découverte dans le faubourg Saint-Antoine, à Paris* (1706); *De l'urine de vache, de son analyse et de ses effets en médecine* (1707); *Mémoire sur l'hydromel vineux* (1707); *Observations sur la çire* (1708); *Observations sur la manne* (1708); *Observations et expériences sur le sublimé corrosif* (1709); *Notice sur les cloportes* (1709); *Observations sur l'odeur développée pendant la précipitation de l'or dissous dans l'eau régale par l'esprit de sel ammoniac et par le sel de tartre* (1712).



LEIBNIZ (GODEFROY, GUILLAUME).

(Né à Leipzig en 1646, mort à Hanovre en 1716.)

Son père était professeur à l'université de Leipzig; il le perdit lorsqu'il n'avait pas encore six ans. Sa mère, femme de mérite, eut soin de son éducation.

Il lut avec avidité les livres contenus dans la bibliothèque de

son père. « Semblable, dit Fontenelle, aux anciens qui avaient l'adresse de mener jusqu'à huit chevaux attelés de front, il mena de front toutes les Sciences. »

Il entra à quinze ans à l'université de Leipzig, alla ensuite suivre les cours de celle d'Iéna, revint prendre à Leipzig les diplômes de bachelier et de licencié en droit, se fit recevoir docteur à l'université d'Altorf et se mit à voyager.

Il fut quelque temps, à Nuremberg, secrétaire d'une société d'alchimistes, mais le baron de Boinebourg, chancelier de l'électeur de Mayence, l'y ayant rencontré, l'engagea à se rendre près de son maître. Leibniz suivit son nouvel ami à la cour de l'Électeur, à Francfort, où il fut bientôt après nommé conseiller à la Chambre de revision.

Il s'occupait alors de législation, de droit civil et canonique, de philosophie, de théologie et même de politique, en ce sens qu'il rédigeait pour son souverain des mémoires relatifs aux questions pendantes. Il faut avouer à ce propos qu'il se fit, par ordre sans doute, le défenseur de la reine Christine, au sujet de l'assassinat de Monaldeschi.

Lorsqu'en 1671 les armements formidables préparés par Louis XIV jetèrent l'alarme en Allemagne, Leibniz proposa « une coalition contre la France ». A la paix, il rêva de détourner le torrent du côté de l'Égypte, et le baron de Boinebourg l'envoya à Saint-Germain pour présenter au roi le plan de l'expédition. On le reçut avec distinction à la cour, mais Louis XIV avait d'autres vues.

Leibniz profita de son séjour à Paris pour se lier avec les savants et les littérateurs les plus distingués : Huyghens, qui lui donna le goût des études mathématiques, Clersellier et Perrier,

qui lui prêtèrent les manuscrits inédits de Descartes et de Pascal, Arnault, Huet, Malebranche, etc.

Nous croyons devoir reproduire ici une lettre où il raconte à Bernoulli l'histoire de son initiation aux Mathématiques :

« Lorsque je vins à Paris, en 1672, j'étais un géomètre *autodidacte*, mais peu expérimenté, n'ayant pas la patience de parcourir la longue série des démonstrations. Etant enfant, j'avais étudié l'algèbre élémentaire d'un certain Lauguis, puis celle de Blavius ; quant à celle de Descartes, elle m'avait paru trop difficile..... C'est à cette époque que je découvris ma machine arithmétique. C'est alors aussi que Huyghens, qui me croyait, je présume, plus capable que je ne l'étais, m'apporta un exemplaire du *Pendule*. Ce fut pour moi le commencement ou l'occasion d'une étude géométrique plus approfondie. Pendant que nous nous entretînmes, il me fît voir que je n'avais pas une notion assez exacte des centres de gravité; il me l'expliqua en peu de mots en ajoutant que Pascal avait très bien traité cette question..... Je saisis avec empressement les conseils du grand mathématicien, car il m'avait été facile de voir combien Huyghens était grand. Je rougis de me voir ignorer une telle chose, et, voulant étudier sérieusement la Géométrie, je demandai à Huyghens de me prêter Pascal, ainsi que Grégoire de Saint-Vincent. Sans aucun retard, je suivis les routes frayées par Vincent, et j'admirais les problèmes qu'il avait entrepris, et qu'avait poursuivis Pascal. Je voyais avec plaisir ces sommes et les sommes des sommes, les solides qui en naissaient et leurs démonstrations. Tout cela me donnait plus de plaisir que de travail... Huyghens me conseilla de lire Descartes et Slusius, qui enseignent la manière de faire des équations locales (sans doute de trouver les équations des lieux), ce

qui, ajouta-t-il, est très commode. J'examinai donc la géométrie de Descartes et celle de Slusius..... Peu après la géométrie de Jac. Gregorius Scot me tomba entre les mains..... Je voyais bien qu'il y avait des choses plus élevées encore, mais que, pour les expliquer, il fallait une nouvelle méthode de calcul. C'est alors que je fis ma quadrature arithmétique et d'autres semblables qui furent reçues avec enthousiasme par les Français et les Anglais, mais je ne jugeai pas ce travail digne d'être édité. J'en avais assez de ces misères, quand je voyais l'Océan s'ouvrir devant moi. »

Le baron de Boinebourg mourut en 1673, et, la mission dont Leibniz avait été chargé en France se trouvant par là terminée, il se rendit en Angleterre.

Il se lia à Londres avec Boyle, Wallis, Gregory, Barrow, Collins, Oldenbourg, et visita Newton. Il fut alors reçu membre de la Société Royale.

Il était encore à Londres lorsqu'il apprit la nouvelle de la mort de son protecteur, l'électeur de Mayence; il repassa sur le continent et offrit, de Paris, ses services au duc de Brunswich-Lunebourg qui avait cherché à se l'attacher, au moment où Leibniz acceptait les offres de l'électeur de Mayence. Le duc lui offrit une pension en le laissant absolument libre de son temps, et même de demeurer à l'étranger tant qu'il le jugerait utile pour lui.

En conséquence, Leibniz s'abandonna au plaisir de relations avec les savants réunis alors à Paris et y demeura jusqu'en 1676, époque à laquelle il se rendit à Hanovre, à la cour de son nouveau protecteur.

D'après M. Foucher de Careil, ce serait en 1675, à Paris, qu'il

serait parvenu à la pleine conception de sa méthode de calcul infinitésimal. Leibniz dit qu'il avait trouvé son nouveau calcul dès l'année 1674.

Leibniz, à Hanovre, fut d'abord détourné pendant assez longtemps de ses travaux scientifiques; il accepta notamment la mission d'écrire l'*Histoire de la maison de Brunswick,* mission qui l'engagea dans une série de voyages nécessaires pour retrouver les pièces authentiques dont il avait besoin. Du reste, il ne marchanda pas son zèle à son bienfaiteur, car il n'hésita pas à remonter bien au delà du déluge, dans le but, à la vérité, de se donner les moyens de produire ses idées au sujet des transformations géologiques.

« Si les grands ossements de la terre, ces roches impérissables, sont presque entièrement vitrifiées, n'est-ce pas, dit-il, par la fusion ?

« A l'origine, le feu chassa dans l'air l'humidité, qui se convertit d'abord en vapeurs aqueuses; par suite de l'abaissement de température, ces vapeurs se trouvant ensuite en contact avec la surface refroidie de la terre, s'écoulèrent en eau, et l'eau, délayant les débris de ce récent incendie, retint en elle les sels fixes, d'où est résultée une sorte de lessive, qui a formé les mers.

« Par suite du refroidissement du globe, les masses se sont inégalement raffermies et ont éclaté çà et là, de sorte que certaines portions, en s'affaissant, ont formé des vallées, tandis que d'autres plus solides, restant debout, constituèrent les montagnes. »

Leibniz reconnaissait aussi les effets produits par le séjour ou le déplacement des eaux.

Ces travaux entrepris sur commande ne l'avaient pas empêché

de fonder avec le professeur Otto Mencke (Menckenius) les *Acta Eruditorum*, qui parurent à Leipzig à partir de 1678, et d'y insérer de nombreuses communications qui leur acquirent bientôt une réputation européenne.

Il fut nommé membre associé de l'Académie des Sciences de Paris en 1700 et chargé, l'année suivante, par le duc de Brandebourg, aïeul du grand Frédéric, de rédiger les statuts de l'Académie de Berlin, dont la présidence perpétuelle lui fut dévolue, avec la liberté de résider à l'étranger, c'est-à-dire à Hanovre.

Leibniz a publié un grand nombre d'Ouvrages sur la Métaphysique et a laissé, sur le même sujet, des montagnes de manuscrits que l'on conserve à la bibliothèque de Hanovre, mais qui, probablement, ne verront jamais le jour.

Il se trouva mêlé à toutes les questions politiques et religieuses qui agitaient les esprits de son temps et, notamment, il entretint avec Bossuet une longue correspondance, dans le but d'arriver à réunir en une seule l'Église catholique et toutes les Églises réformées.

Mais nous devons nous borner ici à ses travaux mathématiques.

C'est dans le numéro d'octobre 1684 des *Acta Eruditorum* que parut sa *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, et singulare pro illis calculi genus*. Outre la solution définitive du problème des tangentes, Leibniz y inaugurait le calcul intégral par la solution du problème de de Beaune : *Trouver une courbe dont la sous-tangente soit constante*.

Peu de temps après (1686), il exposait les principes du calcul infinitésimal dans un autre écrit intitulé : *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*. La même année, il proposait et résolvait le problème de la courbe isochrone,

c'est-à-dire telle qu'un corps pesant assujetti à la suivre s'élève ou s'abaisse de quantités égales dans des temps égaux, problème dont Huyghens donna aussi la solution; et peu après celui de la courbe que doit suivre un corps pesant pour que sa distance à un point fixe varie proportionnellement au temps.

En même temps, il jetait de nouvelles lumières sur la théorie proprement dite par divers articles publiés dans les journaux.

En 1690, il résolvait le problème de la chaînette, proposé d'abord par Galilée, et auquel Jacques Bernoulli l'engageait à appliquer le nouveau calcul.

En 1692, Leibniz inventait la théorie de l'enveloppe d'une courbe mobile, et Jean Bernoulli lui écrivait qu'il voyait bien que le dieu de la Géométrie l'avait admis plus avant que lui dans son sanctuaire.

Le marquis de l'Hospital exposait sa méthode dans un ouvrage magistral et les Bernoulli l'illustraient par les plus belles découvertes.

Leibniz jouissait en paix de sa gloire lorsque Fatio de Duiller, qui vivait alors en Angleterre, à l'ombre de Newton, présenta celui-ci, en 1699, comme inventeur de l'analyse infinitésimale, ajoutant qu'il ignorait ce que Leibniz avait emprunté du premier inventeur.

Leibniz en appela au témoignage de Newton, tout en rappelant que ses droits étaient reconnus dans une note du livre des *Principes;* mais Newton ne répondit pas.

Keil en 1711 reprit l'assertion de Fatio et accusa même directement Leibniz de plagiat.

Leibniz porta plainte à la Société royale de Londres, que Newton présidait depuis longtemps.

Newton fit nommer, pour examiner le débat, une commission qui rendit en 1712 un jugement inique, mais sans valeur aux yeux de la postérité.

Nous donnerons à notre tour notre sentiment au sujet de ce procès célèbre, tant de fois revisé depuis; mais, auparavant, nous résumerons aussi exactement qu'il nous sera possible, comme nous l'avons fait pour Newton, celles des publications du philosophe allemand qui se rapportent aux Sciences.

Voici d'abord les titres de ces Ouvrages; nous les laissons dans l'ordre adopté par Dutens, qui est celui dans lequel ils ont été écrits.

Lettres diverses de Leibniz à Oldenbourg, à Collins et à Newton, tirées du *Commercium epistolicum* de Collins (Londres, 1712) et du tome III des œuvres de Wallis. (Oxford, 1699.)

Lettres de Leibniz à Wallis. (1695-1699.)

Lettre à l'auteur du *Journal des Savants* sur le principe de justesse des horloges portatives. (Mars 1675.)

De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum, in numeris rationalibus. (*Acta Eruditorum*, 1682.)

De dimensionibus figurarum inveniendis. (*Acta Eruditorum*, 1684.)

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. (*Acta Eruditorum*, 1684.)

De dimensionibus curvilineorum. (*Acta Eruditorum*, 1684.

Demonstratio geometrica regulæ apud Staticos receptæ, de momentis gravium in planis inclinatis. (*Acta Eruditorum*, 1685.)

Brevis demonstratio Erroris memorabilis Cartesii et

Aliorum, circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo, eamdem semper quantitatem motus conservari; qua et in re mechanica abutuntur. (*Acta Eruditorum*, 1686.)

Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas (*Acta Eruditorum*, 1686.)

De Geometria recondita, et analysi indivisibilium atque infinitorum. (*Acta Eruditorum*, 1686.)

De resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente. (*Acta Eruditorum*, 1689.)

Tentamen de motuum Cœlestium Causis. (*Acta Eruditorum*, 1689.)

De linea isochrona, in qua grave sine acceleratione descendit. (*Acta Eruditorum*, 1689.)

Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum, quæ centrum habent, etc. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

De linea in quam flexile se pondere proprio curvat; ejusque usu insigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales et logarithmos. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

De solutionibus problematis catenarii, vel funicularis a J. Bernoullio propositi. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

De la chaînette, ou solution d'un problème fameux proposé par Galilée, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, avec son usage pour les logarithmes et une application à l'avancement de la navigation. (*Journal des Savants*, 1692.)

De linea ex lineis, numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac de novo ea in re Analysis infinitorum usu. (*Acta Eruditorum*, 1692.)

Nouvelles remarques touchant l'analyse des transcendantes,

différente de celle de la Géométrie de M. Descartes. (*Journal des Savants*, 1692.)

Generalia de Natura linearum anguloque contactus, et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis et eorum usibus nonnullis. (*Acta Eruditorum*, 1692.)

Supplementum Geometriæ practicæ sese ad problemata transcendentia extendens, ope novæ methodi generalissimæ per series infinitas. (*Acta Eruditorum*, 1698.)

Règle générale de la composition des mouvements et applications de cette règle à deux problèmes. (*Journal des Savants*, 1693.)

Supplementum Geometriæ dimensoriæ et multiplex constructio lineæ ex data tangentium conditione. (*Acta Eruditorum*, 1693.)

Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione. (*Acta Eruditorum*, 1694.)

Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes. (*Journal des Savants*, 1694.)

Constructio propria problematis de Curva isochrona paracentrica, etc. (*Acta Eruditorum*, 1694.)

De novo usu centri gravitatis ad dimensiones, et speciatim pro areis inter curvas parallelas descriptas, seu rectangulis curvilineis; ubi et de parallelis in universum. (*Acta Eruditorum*, 1695.)

Sur les solutions par J. Bernoulli et Lhopital du problème de la courbe de plus rapide descente, avec la solution d'un autre problème proposé par le même J. Bernoulli. (*Acta Eruditorum*, 1697.)

Specimen novum analyseos pro scientia infiniti, circa summas et quadraturas. (*Acta Eruditorum*, 1703.)

Continuatio analyseos quadraturarum rationalium. (*Acta Eruditorum*, 1703.)

De lineæ super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis, et composito ex ambobus. (*Acta Eruditorum*, 1706.)

Symbolismus memorabilis calculi algebraïci et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de lege homogeneorum transcendentali. (*Miscellanea Berolinensia.*)

Constructio problematis ducendi rectas quæ tangunt lineas centrorum gravitatis. (*Miscellanea Berolinensia.*)

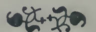
Tentamen de naturâ et remediis resistentiarum, quæ a corporum superincessu oriuntur. (*Miscellaneà Berolinensia.*)

Les articles assez nombreux que nous avons passés sous silence, ou bien font double emploi, ou se rapportent soit à des questions qui ne présentent plus aujourd'hui aucun intérêt, soit à une mathématique métaphysique à peine scientifique, ou enfin ont trait à la querelle relative à l'invention du calcul infinitésimal. Nous ferons de ces derniers un résumé à part.

L'analyse de tous ces Ouvrages présente des difficultés particulières qui tiennent à ce que ce sont des articles de revues et non des traités en forme didactique; à ce qu'ils empiètent les uns sur les autres en même temps qu'ils contiennent de nombreuses redites; à ce que les développements relatifs à la méthode n'y sont présentés, la plupart du temps, qu'à propos des problèmes dont la solution a exigé les perfectionnements correspondants; enfin et surtout à ce qu'ils sont très négligemment rédigés, dans

le plus mauvais latin possible et à l'aide de notations vraiment horribles.

Nous rapprocherons les uns des autres ceux de ces écrits qui ont trait aux questions analogues. Nous rendrons d'abord compte des articles qui se rapportent à la théorie des suites ainsi qu'aux quadratures, cubatures et rectifications; nous nous occuperons ensuite de ceux qui ont trait à la Mécanique générale, théorique ou pratique; nous terminerons par ceux où sont exposés les principes du calcul infinitésimal, soit d'un point de vue général, soit à propos des questions spéciales qui ont donné lieu aux perfectionnements successifs de la méthode différentielle. Nous ne dirons rien de ceux qui présentent trop peu d'intérêt. Nous commencerons par la correspondance qui s'est établie entre Leibniz et Newton, de 1673 à 1676, par l'intermédiaire d'Oldenbourg.



La première des lettres adressées par Leibniz à Oldenbourg est du 3 février 1673; elle contient une remarque qui est devenue la base de la théorie des différences finies, mais Leibniz n'y est pas revenu depuis.

Si l'on considère la suite des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres entiers consécutifs, leurs différences forment une autre suite, les différences de ces différences en forment une troisième et ainsi de suite : la $m^{\text{ième}}$ de ces suites ne comprend plus que des nombres égaux.

Leibniz conclut de cette remarque un moyen simple de prolonger la suite des $m^{\text{ièmes}}$ puissances en question.

Mouton avait déjà employé ce procédé pour la construction

d'autres tables, mais dans des conditions où ce procédé n'était pas fondé sur des bases sûres.

Leibniz reconnaît les droits de Mouton, mais il conteste la justesse des applications qu'il fait de sa méthode.

La seconde lettre est du 15 juillet 1674. Leibniz annonce qu'il a fait construire une machine à calculs qui donne facilement le produit d'un nombre de dix chiffres par un nombre de quatre, en quatre tours de roues, « sans aucun travail de l'esprit et sans qu'il y ait même à faire d'addition ».

Il ajoute qu'il a trouvé que le segment d'une cycloïde, compris entre la courbe et la droite menée du sommet au point situé à une distance de la base égale au rayon du cercle générateur, est égal à la moitié du carré construit sur le rayon de ce cercle.

Ce théorème dépend d'une théorie qu'il fera connaître, dit-il, lorsqu'il en aura le loisir.

Dans sa troisième lettre, Leibniz annonce avoir fait une découverte mémorable touchant l'évaluation des dimensions des courbes : « Vous savez que lord Brouncker et Nicolas Mercator ont donné des séries indéfinies de nombres rationnels pour représenter l'aire de l'hyperbole (rapportée à ses asymptotes). Mais personne jusqu'ici n'a pu faire l'équivalent pour le cercle. Quoique Brouncker et Wallis aient proposé des suites de nombres rationnels approchant de plus en plus de sa surface, personne cependant n'a donné une série indéfinie de nombres rationnels dont la somme soit exactement égale à la circonférence du cercle. Ou bien, s'ils en ont donné l'un et l'autre, c'est sans s'en douter. Mais la chose m'a heureusement réussi, et la série à laquelle je

suis parvenu a cela de particulier qu'elle met en évidence de merveilleuses analogies entre le cercle et l'hyperbole. C'est pourquoi le problème de la triangulation du cercle se trouve désormais transporté de la Géométrie à l'Arithmétique des infinis. En sorte qu'il ne reste plus qu'à perfectionner la sommation des suites. Ceux qui, jusqu'ici, avaient cherché la quadrature exacte du cercle n'avaient même pas entrevu la voie par laquelle il est possible d'espérer y arriver. J'oserai dire que je suis le premier à l'avoir fait. La même méthode me fournit le moyen d'obtenir géométriquement un arc dont le sinus est donné. »

L'expression *géométriquement* est ici prise dans le sens *exactement;* en réalité il ne s'agit, bien entendu, que d'approximations indéfinies.

Leibniz croyant toutes ces choses nouvelles, son enthousiasme est acceptable; toutefois il eût mieux valu qu'il parlât moins légèrement de Wallis et de Brouncker.

Mais ce qu'il croyait nouveau avait été fait par James Grégory, dont les travaux, quoique non encore publiés, étaient connus des savants, au moins en Angleterre, et Newton avait non seulement poussé ses recherches beaucoup plus loin que son compatriote, mais avait même déjà donné plusieurs méthodes générales, applicables selon les cas, pour traiter les questions analogues. Aussi la lettre de Leibniz dut-elle lui inspirer une forte envie de faire sentir sinon ses griffes, car il ne les montra pas encore, au moins sa force. Toutefois il ne répondit qu'en 1676.

La quatrième lettre de Leibniz à Oldenbourg est de 1674, ou du commencement de 1675.

« Je crois facilement, dit-il, qu'un problème solide ne puisse

pas être rendu plan, cependant il y aurait intérêt à l'établir comme Euclide a démontré les incommensurabilités.

« Vous dites qu'un de vos compatriotes a observé qu'une des formules de Cardan donnait la racine d'une équation du second degré. J'avoue que je ne l'admets pas et je demande des explications.

« Je ne vois pas qu'il soit bien difficile d'enlever les termes intermédiaires d'une équation arbitraire d'un degré quelconque. »

Il est probable que Leibniz s'exprime mal ici ou qu'il avait mal compris ce qu'Oldenbourg lui avait mandé.

« Il serait bien utile de pouvoir résoudre les équations au moyen des tables de sinus; si toutefois le calcul n'exigeait pas tant de préparation que l'avantage ne se réduisît à rien.

« Je crois que la méthode du très célèbre Newton, pour trouver les racines des équations, diffère de la mienne. D'ailleurs je ne vois pas ce à quoi serviraient, dans la mienne, les logarithmes ou les cercles concentriques. Cependant, comme la question ne vous paraît pas sans valeur, je chercherai à la résoudre et vous communiquerai la solution à laquelle je serai parvenu, aussitôt que j'aurai assez de loisir. »

Encore une phrase imprudente. Mais Leibniz ne croyait qu'à la bienveillance.

« Je suis tombé dernièrement sur une méthode très élégante au moyen de laquelle des formules analogues à celles de Cardan peuvent être accommodées aux équations de tous les degrés, ramenées à une certaine forme, sans qu'il soit nécessaire de faire disparaître tous les termes intermédiaires entre le premier et l'avant-dernier, ni même aucun d'eux, pourvu qu'il existe

quelque relation entre les termes intermédiaires. Je vous en ferai part lorsque j'aurai aperçu le moyen de jeter quelque lumière nouvelle sur cette recherche.

Leibniz n'est jamais revenu sur ce sujet.

« Vous m'avez annoncé que vos compatriotes pouvaient obtenir par approximations les dimensions de toutes les courbes; je voudrais savoir s'ils peuvent obtenir la longueur de l'ellipse ou de l'hyperbole sans leurs quadratures.

« Je ne vous demanderai plus qu'une chose, c'est comment vous résolvez les équations par logarithmes. »

Dans sa cinquième lettre à Oldenbourg, en date du 28 décembre 1675, Leibniz parle de recherches entreprises par Tschirnhausen pour retrouver certains manuscrits de Roberval, de Pascal et de Fermat; il ajoute qu'on lui donne l'espoir d'avoir communication de quelques manuscrits de Pascal.

« Les éléments mathématiques de Jean Prestet ne contiennent rien de bien remarquable, si ce n'est que l'Arithmétique y est traitée par lettres. Il ne faut donc pas que vous pensiez que rien y ait été emprunté à vos compatriotes. La résolution des équations par sinus, par logarithmes ou par séries leur restera complètement.

« Je vous prie de me rappeler au souvenir de l'illustre Boyle, toutes les fois que vous en aurez l'occasion. C'est l'un des hommes que j'estime le plus, à cause de ses vertus et de son savoir. J'ai lu dernièrement de lui une *Diatribe sur l'étude de la Théologie* qui n'est pas à mépriser, elle me confirme dans l'idée dont je vous ai déjà parlé de traiter les questions de l'âme par démonstrations géométriques... »

Il termine par l'annonce de quelques communications sur divers points des Mathématiques, mais sans entrer dans aucun détail.

Ici vient se placer la première lettre adressée par Newton à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg. Elle est de juin 1676.

On y trouve la preuve que Newton était déjà à cette époque en possession de ses méthodes pour obtenir les développements en séries des fonctions algébriques explicites ou implicites, méthodes qu'il a plusieurs fois reproduites dans ses Ouvrages et que nous avons déjà fait connaître. Mais on y trouve aussi des propositions nouvelles : les développements en séries de quelques fonctions circulaires, notamment

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots.$$

(On remarquera que Newton laisse cachée la loi de formation des coefficients de ces deux suites;) celui d'un arc d'ellipse, compté de l'une des extrémités du petit axe, en fonction de l'abscisse de la seconde extrémité, et celui de cette abscisse en fonction de l'arc correspondant; celui de l'abscisse d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, en fonction de l'aire de la courbe; etc.

Quelques-uns de ces développements avaient déjà été obtenus par Mercator et James Grégory ; aussi Newton ne dit-il pas qu'il en soit l'inventeur; mais qu'ils ont été découverts *ab Anglis*.

Voici au reste comment il s'exprime : « Quoique la modestie de Leibniz lui fasse faire beaucoup de cas des recherches de nos

compatriotes sur les développements en séries infinies, dont on commence à parler, je ne doute pas qu'il ne soit arrivé (comme il l'affirme) à des résultats semblables et peut-être meilleurs. Mais, comme il désire savoir ce qui a été inventé sur ce sujet par les Anglais, et que je suis tombé, il y a quelques années, sur cette spéculation, je vous adresse, pour satisfaire en partie à son désir, quelques-uns des résultats qui se sont présentés à moi. »

La réponse de Leibniz est du 27 août 1676 : on voit qu'elle ne se fit pas attendre. Elle se distingue entièrement des lettres précédentes qui ne contenaient que les affirmations sans preuves de découvertes assez problématiques. Leibniz montre clairement, dans cette réponse, qu'il a, par ses propres recherches, poussé assez loin la méthode des développements des fonctions en séries, pour pouvoir quarrer les courbes dont ces fonctions représenteraient les ordonnées ; ses procédés ne valent pas ceux de Newton, il se fait d'ailleurs, comme on va le voir, une idée exagérée de leur valeur, mais ils sont ingénieux.

« Vos lettres du 26 juillet contiennent sur l'Analyse beaucoup plus de choses mémorables que bien des volumes publiés sur la matière. C'est pourquoi je rends grâces à vous, à Newton et à Collins de m'avoir fait part de tant de méditations admirables.

« Les découvertes de Newton sont dignes du génie qu'il a montré dans ses expériences relatives à l'Optique et dans la construction de son télescope catadioptrique.

« Sa méthode pour trouver les racines des équations et les aires des figures, au moyen de séries infinies, diffère de la mienne à ce point qu'il est permis d'admirer la diversité des chemins par lesquels on peut atteindre à un même but.

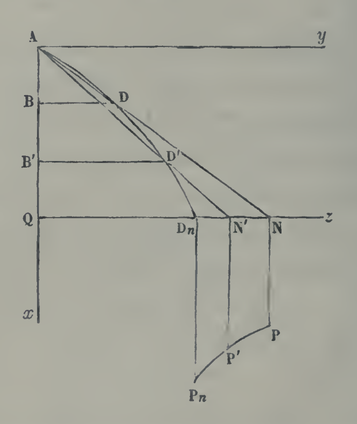
« Mercator a enseigné à quarrer les courbes dont l'ordonnée est exprimée rationnellement en fonction de l'abscisse, en y employant des séries obtenues par divisions; Newton atteint le même but, pour toutes sortes de courbes, en extrayant des racines. Ma méthode n'est qu'une application d'une doctrine générale concernant la transformation des figures, qui me permet, une courbe quelconque étant donnée, de la changer en une autre, ayant même aire, mais dont l'ordonnée ne s'élève tout au plus qu'au cube, au carré, ou même au premier degré (*ut ordinatæ dimensio non ascendat ultra cubum aut quadratum, aut etiam simplicem dignitatem, seu infimum gradum*), de telle sorte que l'aire d'une courbe quelconque puisse être réduite en série par extraction d'une racine carrée ou cubique, suivant la méthode de Newton, ou par simple division suivant celle de Mercator. »

Newton trouvait très simple et très aisé d'extraire les racines de toutes les équations : Leibniz fait mieux, il abaisse toutes les équations au troisième et même au premier degré. Les deux héros s'annoncent ainsi à qui mieux mieux les succès les plus invraisemblables; mais il y a toujours une grande différence entre les erreurs dans lesquelles ils tombent respectivement : Newton se trompe sur la valeur pratique des méthodes qu'il propose, mais ces méthodes sont toujours raisonnables. En d'autres termes il a les solutions de toutes les questions possibles parce qu'il a pour toutes des méthodes qui, si on pouvait les employer, conduiraient au but. Quant à Leibniz, il entrevoit des moyens d'aborder les questions, il essaye ces moyens sur des exemples simples et, ayant réussi, il s'abandonne à son imagination et conclut à la certitude d'un succès perpétuel.

Il ne s'arrête pas à l'abaissement au troisième degré, par rap-

port à l'ordonnée, par exemple, des équations de toutes les courbes, et va droit au but : « *Ex his transmutationibus, simplicissimam ad rem præsentem delegi. Per quam scilicet unaquæque figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, ordinata in nullam prorsus ascendit potestatem : Ac proinde sola Mercatoris divisione per infinitam*

Fig. 15.



seriem exprimi potest. » C'est-à-dire : Parmi ces transformations, je choisis la plus simple. Elle permet de changer une courbe quelconque en une autre équivalente, dans l'équation de laquelle l'ordonnée n'entre plus qu'au premier degré : de sorte que son aire puisse être exprimée sous forme de série infinie, par une simple division.

Voici en quoi consiste ce procédé de transformation, le seul, je le répète, que Leibniz expose avec détails :

Soient (*fig.* 15) ADD' ... D_n la courbe proposée, rapportée aux axes Ax et Ay; d'un point quelconque de cette courbe, Qz un

axe auxiliaire, mené parallèlement à Ay, et N le point de rencontre de AD avec Qz; si l'on considère un second point D′ de la courbe proposée, que l'on refasse pour ce point les mêmes constructions, enfin que l'on élève en N sur Qz une perpendiculaire NP dont la longueur soit déterminée par la condition

$$\text{NP}.\text{NN}' = \text{BD}.\text{BB}',$$

et que l'on continue de même de proche en proche, le point P décrira une courbe $\text{PP}' \ldots \text{P}_n$ dont l'aire PND_nP_n sera bien égale à l'aire DBQD_n de la courbe proposée. Mais la nouvelle courbe sera-t-elle plus facile à quarrer que l'ancienne?

Soient

$$\text{AB} = x, \quad \text{BD} = y \quad \text{et} \quad \text{QN} = z,$$

et, de même,

$$\text{AB}' = x', \quad \text{B}'\text{D}' = y' \quad \text{et} \quad \text{QN}' = z';$$

soient d'ailleurs

$$f(x, y) = 0,$$

l'équation de la courbe $\text{AD} \ldots \text{D}_n$, et

$$\text{AQ} = k.$$

z sera déterminé par la proportion

$$\frac{\text{QN}}{\text{BD}} = \frac{\text{QA}}{\text{BA}},$$

ou

$$\frac{z}{y} = \frac{k}{x};$$

on aura donc entre z et x l'équation

$$f\left(x, \frac{zx}{k}\right) = 0.$$

Supposons qu'on puisse en tirer

$$x = \varphi(z),$$

et, par suite,

$$x' = \varphi(z').$$

BB′ sera exprimé par

$$\varphi(z') - \varphi(z),$$

l'ordonnée NP $= u$ de la courbe PP′ ... P_n sera donc fournie par l'équation

$$u(z - z') = [\varphi(z') - \varphi(z)]y = [\varphi(z') - \varphi(z)]\frac{zx}{k}$$

$$= [\varphi(z') - \varphi(z)]\frac{z\varphi(z)}{k},$$

d'où

$$u = \frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z - z'}\,\frac{z\varphi(z)}{k},$$

et en désignant par $\varphi'(z)$ la limite vers laquelle tendrait

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z - z'},$$

lorsque z' tendrait vers z,

$$u = -\frac{1}{k}\varphi(z)\varphi'(z)z.$$

Tout ira donc bien si la fonction φ est rationnelle, mais quand le sera-t-elle?

Leibniz prend pour exemple celui où la courbe AD ... D_n serait un quart de cercle : dans ce cas

$$y^2 = (2R - x)x;$$

par suite, comme $k = R$,

$$\frac{x^2 z^2}{R^2} = (2R - x)x$$

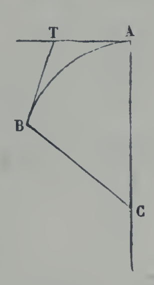
et, en conséquence,

$$x = \frac{2R^3}{R^2 + z^2},$$

valeur effectivement rationnelle, mais qui ne se trouve telle que parce que la courbe est du second degré et qu'elle passe d'ailleurs par l'origine.

La seule chose vraiment remarquable dans ce passage est la

Fig. 16.



transformation analytique qu'effectue Leibniz. Il n'y attache pour le moment aucune importance; mais elle laissera des germes féconds dans son esprit.

Leibniz donne ensuite, mais sans explications, quelques formules analogues à celles que Newton lui avait adressées : soient A (*fig.* 16) l'un des sommets d'une conique situés sur l'axe focal, C son centre, AB un arc quelconque de la conique, AT et BT les tangentes en A et B; si l'on prend pour unité le rectangle des deux demi-axes et qu'on représente par t le rapport de AT à AC, l'aire du secteur ACB sera représentée par

$$\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \dots$$

suivant que la courbe sera une hyperbole ou une ellipse. Le rapport de l'aire du cercle à celle du quarré circonscrit est donc

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

« expression, ajoute Leibniz, que j'ai communiquée à quelques amis il y a environ trois ans, qui est sans doute la plus simple de toutes et qui frappe grandement l'esprit ».

Soient un nombre moindre que 1, $(1-m)$, et l son logarithme hyperbolique

$$m=\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}-\frac{l^4}{1.2.3.4}+\ldots;$$

si le nombre est plus grand que 1, $(1+n)$,

$$n=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Le cosinus et le sinus d'un arc a sont

$$1-\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

et

$$\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

On remarquera que, dans toutes les formules précédentes, Leibniz a soin d'indiquer la composition des dénominateurs.

« Je pourrais ajouter beaucoup d'autres choses qui ne le céderaient à celles-ci ni pour l'élégance ni pour l'exactitude; mais je suis ainsi fait que, content d'avoir découvert les méthodes générales, je laisse volontiers le reste aux autres. Car toutes ces choses

ne sont estimables que parce qu'elles développent l'art de l'invention et perfectionnent l'esprit. Si ce qui précède paraît obscur, je l'éclaircirai volontiers et j'expliquerai aussi comment on peut développer en séries les racines de toutes équations, sans aucune extraction, ce qui paraîtra sans doute admirable.

« Mais j'aurais désiré que l'illustre Newton expliquât un peu plus complètement quelques-unes de ses opérations ; ... »

« Je n'ai pas encore pu lire ses lettres avec le soin qu'elles méritent, parce que j'ai voulu vous répondre plus vite. Il en résulte que je n'oserais pas dire si je pourrais suppléer à ce qu'il a supprimé. Mais il serait préférable qu'il le fît lui-même ; car il est à croire que je ne saurais écrire rien que ne pût nous enseigner un homme dont les pensées sont si profondes. »

Le passage qui termine la lettre est intéressant à plus d'un titre :

« Je ne vois pas bien ce que vous paraissez dire que la plupart des difficultés (excepté les problèmes Diophantins) peuvent être réduites par les séries. Il y a beaucoup de questions jugées jusqu'ici très difficiles, qui ne dépendent ni des équations (ordinaires) ni des quadratures; telles sont, entre beaucoup d'autres, *celles qui dépendent de la méthode inverse des tangentes*, que Descartes avoue ne pas posséder.

« On trouve dans sa correspondance une lettre à de Beaune où il s'efforce de trouver quelques courbes proposées par celui-ci, celle entre autres dont la sous-tangente est constante. Ni Descartes, ni de Beaune, ni personne que je sache n'a trouvé cette courbe. Cependant j'ai résolu le problème, *par une analyse certaine*, aussitôt que je le vis. Toutefois j'avoue qu'il me reste en ce genre quelque chose de désirable à rechercher. *Mais en voilà*

assez sur ce point. J'ai résolu de m'y attacher aussitôt que j'en aurai le loisir »

Le calcul différentiel paraît assez clairement désigné dans ce passage qui a été discuté par Newton et Leibniz lors de leur querelle.

La réponse de Newton est une page d'histoire vraie, très intéressante et très curieuse sous beaucoup de rapports, comme on va le voir, et tout nous engage à la reproduire presque *in extenso;* elle est datée du 24 octobre 1676.

« Je ne saurais dire avec quel plaisir (*voluptate*) j'ai lu les lettres des illustres MM. Leibniz et Tchirnhaüsen.

« La méthode de Leibniz pour parvenir à des séries convergentes est assurément très élégante (*sane perelegans*) et elle eût suffi à montrer l'esprit inventif (*ingenium*) de l'auteur, s'il n'avait rien écrit davantage. Mais les vues, très dignes de lui, qu'il a répandues dans sa lettre, nous promettent de sa part les plus grandes choses.

« La diversité des méthodes pour arriver au même but m'a fait d'autant plus de plaisir que j'en avais trois pour parvenir aux séries dont il s'agit.

« Je vous ai déjà indiqué l'une d'elles dans ma précédente lettre : j'en ajoute une autre, celle sur laquelle je suis tombé d'abord, avant d'avoir songé aux divisions et extractions de racines, dont je me sers maintenant.

« A l'époque où je commençais mes études mathématiques, étant tombé sur les œuvres de notre très célèbre Wallis, je réfléchissais aux séries par l'intercalation desquelles il parvint à l'aire du cercle et de l'hyperbole et je songeais que, si l'on pou-

vait interpoler les aires des courbes

$$y = (1 - x^2)^{\frac{0}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{2}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{4}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{6}{2}},$$

$$\ldots;$$

lesquelles sont

$$x,$$

$$x - \frac{1}{3}x^3,$$

$$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7,$$

$$\ldots;$$

on connaîtrait les aires des courbes intermédiaires

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}},$$

$$\ldots;$$

desquelles la première est celle du cercle.

« Pour arriver à cette interpolation, je remarquai que, dans toutes les aires, le premier terme était toujours x, et que les

seconds termes

$$\frac{0}{3}x^3,\quad \frac{1}{3}x^3,\quad \frac{2}{3}x^3,\quad \frac{3}{3}x^3,\quad \ldots,$$

étaient en progression arithmétique; d'où j'inférais que les seconds termes des aires intercalaires devaient être

$$\frac{\frac{1}{2}x^3}{3},\quad \frac{\frac{3}{2}x^3}{3},\quad \frac{\frac{5}{2}x^3}{3},\ \ldots$$

« Quant aux termes suivants, leurs dénominateurs suivaient la progression arithmétique (5, 7, ..., venant après 1 et 3); il ne s'agissait donc que de déterminer les numérateurs.

« Or, dans les formules des aires connues, ces numérateurs étaient les coefficients des termes des puissances successives de $(1+1)$; c'est-à-dire

1
1 et 1,
1, 2 et 1,
1, 3, 3 et 1,
1, 4, 6, 4 et 1,
....

« C'est pourquoi je cherchais comment, dans ces suites de nombres, les derniers pouvaient se déduire des deux premiers, et je trouvai que, le second étant désigné par m, les autres étaient produits par des multiplications successives, en cette sorte :

$$\frac{m-0}{1}\ \frac{m-1}{2}\ \frac{m-2}{3}\ \frac{m-3}{4}\ \frac{m-4}{5}\ \ldots.$$

« J'appliquai aussitôt cette règle pour former les aires intercalaires que je cherchais; et comme, pour le cercle, le second

terme était

$$\frac{\frac{1}{2}x^3}{3},$$

je posai

$$m = \frac{1}{2},$$

et il en résulta les termes

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = -\frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\,\frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128},$$

$$\ldots;$$

d'où je connus que l'aire cherchée du segment de cercle (compris entre les abscisses o et x) était

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \ldots.$$

« Et l'on trouve de la même manière l'aire de l'hyperbole

$$y = \sqrt{1+x^2}.$$

« Tel fut mon premier pas (*ingressus*) dans cette sorte de recherches.

« Mais, après avoir aperçu ces choses, j'en vins bientôt à consi-

dérer que les termes de

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},$$

$$(1-x^2)^{\frac{2}{2}},$$

$$(1-x^2)^{\frac{4}{2}},$$

$$(1-x^2)^{\frac{6}{2}},$$

$$\ldots;$$

c'est-à-dire

$$1,$$

$$1-x^2,$$

$$1-2x^2+x^4,$$

$$1-3x^2+3x^4-x^6,$$

$$\ldots;$$

pouvaient eux-mêmes être interpolés, et par eux, les aires engendrées; et que, pour cela, il n'y avait qu'à omettre les dénominateurs 1, 3, 5, 7, ..., dans les termes représentant les aires. Car les coefficients des termes intercalaires, savoir

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\ldots,$$

$$(1-x^2)^{m},$$

devaient se produire par la multiplication successive des facteurs

$$\frac{m-0}{1},\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\quad \ldots.$$

« De sorte que, par exemple, on aurait

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots,$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \dots$$

et

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \dots.$$

« C'est ainsi que je tombai sur les développements des radicaux en séries, avant de savoir extraire les racines.

« Mais, ayant trouvé ces choses, les autres ne pouvaient me rester longtemps cachées; car, pour faire la preuve des résultats auxquels j'étais arrivé, je fis le carré de

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots$$

et je trouvai

$$(1-x^2),$$

tous les autres termes s'évanouissant d'eux-mêmes, par la continuation de la série; et, de même, le cube de

$$1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \dots$$

donna aussi

$$(1-x^2).$$

« C'est alors que, pour arriver à une démonstration certaine de ces conclusions, je fus conduit, comme par la main, à essayer, inversement, si les séries que fournissent les racines de $(1+x^2)$ ne pouvaient pas être extraites de la manière employée en Arithmétique (*more arithmetico*), et la chose réussit bien (*et res bene successit*).

« Ces points bien établis, je négligeai dès lors l'interpolation des séries et je m'en tins à ces opérations, comme fournissant des bases bien plus heureuses. Au reste, la réduction des fractions par la division, qui est beaucoup plus facile, ne me resta pas non plus ignorée.

« Mais alors j'entrepris bientôt la résolution des équations affectées (c'est-à-dire contenant l'inconnue à différentes puissances), et je l'obtins. (Nous avons précédemment indiqué la méthode imaginée dans ce but par Newton.) D'où il fut facile d'obtenir les ordonnées, les abscisses au toutes autres droites, connaissant les aires des courbes, ou leurs arcs. Car rien autre chose que la résolution des équations ne pouvait arrêter dans le retour à ces lignes, par lesquelles les aires et les arcs étaient déterminés. (Il semble que Newton ici se laisse un peu entraîner par son imagination.)

« Vers cette époque, la peste m'obligea de fuir et détourna mes idées : j'ajoutai cependant à ce qui précède une certaine manière, que je vais indiquer, de calculer les logarithmes des nombres par l'aire de l'hyperbole, comme suit : ... »

Mais ce qui suit ne contient que des calculs numériques sans indication de méthode. Toutefois il est facile de voir que Newton quarre l'hyperbole $xy = 1$, rapportée à des axes rectangulaires, à partir de $x = 1$, dans les deux sens, au moyen de la formule

$$S = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

qu'il aurait obtenue en quarrant séparément les courbes dont les ordonnées seraient les différents termes de

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots;$$

il calcule donc les aires comprises entre les abscisses $x = 1$ et $x = \pm h$, au moyen de leur somme et de leur différence, qui sont respectivement

$$h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \ldots$$

et

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6} + \ldots;$$

il trouve ainsi successivement

$$\begin{array}{lcl} L\,1,1 & \text{et} & L\,0,9, \\ L\,1,2 & \text{et} & L\,0,8, \\ & \ldots & \end{array}$$

Mais, comme

$$\frac{1,2 \times 1,2}{0,8 \times 0,9} = 2,$$

il arrive aisément à obtenir

$$L\,2;$$

ensuite, comme

$$\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10,$$

il trouve encore

$$L\,10;$$

etc.

« J'ai honte, ajoute-t-il, de dire les longs calculs que j'ai achevés dans ces recherches; car, étant de loisir, je m'y délectais certainement trop. Mais, dès que parut l'ingénieuse *Logarithmotechnie* de Nicolas Mercator (que je suppose avoir découvert sa méthode avant moi), je commençai à m'occuper moins de ces choses; supposant ou qu'il connaissait déjà l'extraction des racines

et la réduction des fractions, ou que, ayant au moins fait la division $\left(\frac{1}{1+x}\right)$, il trouverait certainement le reste avant que je fusse en âge de rien publier.

« Dans le temps toutefois que ce livre parut, je communiquai à Barrow et à Collins un résumé de ma méthode des séries, dans lequel j'avais déterminé les aires et les longueurs de toutes les courbes et les surfaces des solides et tout ce qui pouvait être compris entre des lignes données; et, réciproquement, ces aires ou longueurs étant supposées données, j'en avais déduit leurs extrémités. Et j'avais enrichi cette méthode de diverses séries.

« L'habitude de nous écrire étant née de là, Collins ne cessa d'insister pour que je rendisse le public juge de mes recherches, de sorte que, vers 1671, ayant pris en considération le conseil de mes amis de publier le *Traité de la réfraction de la lumière et des couleurs*, que j'avais alors en état, je commençai à m'occuper de nouveau des séries et j'en écrivis un Traité pour les publier en même temps.

« Mais, vous ayant écrit (c'est à Oldenbourg qu'il s'adresse), à l'occasion du Télescope catadioptrique, une lettre dans laquelle j'expliquais mes idées sur la nature de la lumière, inopinément, quelqu'un fit (c'est sans doute Hooke) que je compris qu'il était important pour moi de vous prier de publier cette lettre en hâte. Mais aussitôt de vives interpellations, venues de divers côtés, me détournèrent de mon dessein et firent que je m'accusai d'imprudence pour avoir perdu mon repos, chose si essentielle, en saisissant l'ombre (*umbram captando*).

« Vers le même temps, Jacob Gregory, au moyen d'une de

.nes séries, que Collins lui avait transmise, parvint après beaucoup d'efforts, comme il l'a écrit à Collins, à la même méthode que moi et en laissa un Traité que j'espère voir éditer par ses amis ; car, avec l'esprit inventif dont il était doué, il est impossible qu'il n'y ait pas ajouté de son crû beaucoup de choses nouvelles dont il importe que le souvenir soit conservé, dans l'intérêt de la chose mathématique.

« Quant à moi, je n'avais pas encore achevé mon Traité lorsque je renonçai à m'en occuper, et, depuis lors, il ne m'est pas venu à l'esprit d'y ajouter ce qui y manquait, parce que je n'avais pas les éléments de la partie dans laquelle j'avais l'intention d'expliquer la méthode pour résoudre les problèmes qui ne peuvent se ramener aux quadratures, quoique j'eusse établi quelque chose de ses bases. (Newton veut évidemment parler ici du retour d'une équation entre la fluente, sa fluxion et la variable, à l'équation correspondante entre les deux fluentes ; mais il est bien éloigné de vouloir le dire, car on va voir qu'il ne veut même pas encore annoncer qu'il sache tirer d'une équation entre deux variables la fluxion de l'une d'elles par rapport à l'autre.) Au reste, dans ce Traité, les séries n'obtenaient qu'une faible part.

« J'accomplis encore d'autres choses d'importance ; je trouvai notamment une méthode pour les tangentes telle que celle que de Sluse vous communiqua il y a deux ou trois ans, mais (à l'instigation de Collins) vous m'écrivîtes alors que j'étais tombé sur la même méthode. Nous y étions parvenus de deux manières différentes. Car j'ai la démonstration de la méthode dont je me sers ; et quiconque la possède ne saurait déterminer autrement les tangentes, à moins qu'il ne veuille dévier de la voie directe.

« Ne pouvant encore donner l'explication de cette base de mes opérations, je l'ai cachée dans l'anagramme suivant :

6*a*, 2*c*, *d*, *æ*, 13*e*, 2*f*, 7*i*, 3*l*, 9*n*, 4*o*, 4*q*, 2*r*, 4*s*, 9*t*, 12*v*, *x*. »

Newton a donné plus tard la traduction de ce secret ; elle est contenue dans la phrase suivante :

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa, où l'on trouve en effet six *a*, deux *c*, un *d*, un *æ*, treize *e*, etc.

Mais Newton vient de dire qu'il avait été arrêté par les questions qui ne peuvent se ramener aux quadratures, ce qui n'est pas étonnant. Il en résulte que *vice versa* était probablement une prise de possession anticipée.

Quoi qu'il en soit, comme tout semble prouver que Leibniz n'avait connu de la méthode de Newton, avant de publier sa *Nova Methodus*, que les 6 *a*, 2*c*, 1 *d*, 1 *æ*, 13 *e*, etc., qui précèdent, on a de la peine à comprendre l'accusation de plagiat portée contre lui.

« Sur cette base, je me suis efforcé de rendre plus simple la quadrature des courbes et je suis parvenu à quelques théorèmes généraux, dont, pour agir avec candeur, je citerai le premier. »

Ce premier théorème, dont Newton fournit ensuite plusieurs applications, a pour objet la quadrature des courbes renfermées dans l'équation

$$y = ax^m(b + cx^n)^p,$$

m, n et p étant quelconques. Newton n'explique pas en cet endroit la marche qu'il a suivie ; il ajoute que, si

$$\frac{m+1}{n}$$

est entier et positif, le développement ne contiendra que $\frac{m+1}{n}$ termes, et qu'ainsi on aura la quadrature géométrique de la courbe; dans ce cas, en effet, l'intégration peut se faire.

« Si $\frac{m+1}{n}$ n'était pas entier et positif, j'en conclurais que la courbe est de celles qui ne peuvent pas être quarrées géométriquement. »

C'est une erreur, car il y a un autre cas d'intégrabilité : celui où

$$\frac{m+1}{n}+p$$

est un nombre entier. Toutefois le résultat auquel parvient Newton est déjà bien remarquable.

« Mais, quand une courbe de ce genre ne peut pas être quarrée géométriquement, j'ai en main des théorèmes pour la comparer aux sections coniques ou à d'autres courbes simples.

« J'ai trouvé aussi des règles pour les expressions trinômes et quelques autres. »

Newton passe ensuite à la rectification géométrique (au moyen d'une hyperbole) d'un arc de la cissoïde, mais il indique la construction sans dire comment il y a été conduit. Il appelle cela une démonstration *perbrevis :* elle l'est tellement qu'on ne voit toujours pas ce que Leibniz aurait pu y prendre.

« Quoiqu'il reste bien des choses à examiner relativement aux méthodes d'approximation et aux divers genres de séries qui peuvent y servir, cependant à peine espérais-je, avec Tschirnhausen, qu'on pût trouver d'autres bases plus simples ou plus générales pour réduire les quantités en séries du genre dont nous

nous occupons, Leibniz et moi, que celles qui reposent sur la division et l'extraction des racines, dont nous nous servons également. Elle ne seraient assurément pas plus générales, car, pour la quadrature et la rectification des courbes, ou autres questions analogues, il ne peut être donné de séries composées de termes algébriques simples qu'il ne soit possible d'obtenir par cette méthode : si, du moins, la question ne comporte qu'une variable.

« Car il ne peut exister plus de séries convergentes pour déterminer une même chose qu'il n'y a de variables dont cette chose dépend. Or, j'ai pu *développer* cette chose en séries, suivant la variable qui était choisie ; et je crois que la même méthode est au pouvoir de Leibniz.

« Car quoique, dans l'application de ma méthode, on soit libre de choisir, pour former la série, telle variable que l'on veut parmi celles dont dépend ce que l'on cherche ; et que celle que Leibniz nous a communiquée, paraisse instituée en vue du choix de la variable qui faciliterait la réduction en fractions qui, par une simple division, fournissent des séries indéfinies : cependant on peut, pour former les développements en séries, adopter d'autres variables, par la méthode au moyen de laquelle je résous les équations, pourvu qu'on forme ces séries au moyen seulement des termes que contient l'équation. »

Ce texte est tellement dense qu'il faudrait bien des explications pour l'éclaircir, mais le lecteur y suppléera aussi bien que moi.

« Au reste, je ne vois pas pourquoi l'on dirait que les problèmes sont résolus accidentellement par ces divisions et extractions de racines, puisque ces opérations sont aussi bien appropriées à ce genre d'Algèbre que les opérations ordinaires d'Arithmétique le sont à l'Algèbre ordinaire.

« Quant à ce qui concerne la simplicité de la méthode, je ne voudrais pas voir les radicaux ou les fractions développés en séries avant toute réduction; au contraire, lorsqu'il s'y présente des quantités composées, on peut essayer toutes sortes de réductions, soit en ajoutant ou retranchant aux variables, soit en les multipliant ou les divisant, soit encore par la méthode de transformation de Leibniz, ou toute autre qui se présente. Alors la résolution en séries par division ou extraction des racines deviendra opportune...

« Voilà ce qu'il y avait à dire des séries où n'entre qu'une seule variable; mais la méthode permet aussi de développer les quantités qui dépendent de deux ou de plusieurs variables. Bien plus, on peut, par cette méthode, former, pour toutes les courbes, des séries analogues à celles que Gregory a données pour le cercle et l'hyperbole et dont le dernier terme fournit l'aire cherchée. Mais je ne voudrais pas entreprendre un calcul si long.

« Enfin les séries peuvent encore être formées de termes composés; comme, par exemple, si l'ordonnée d'une courbe est

$$\sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}},$$

je pose

$$a^2 - ax = z^2,$$

et extrayant la racine du binôme

$$z^2 + \frac{x^3}{a},$$

je trouve

$$z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} + \cdots,$$

série dont tous les termes peuvent être quarrés. »

Si Newton avait dit comment, cela eût pu instruire Leibniz. Les termes en question contiennent tous, à leurs dénominateurs, $\sqrt{a^2 - ax}$, on peut les rendres rationnels en faisant

$$x = a - \frac{u^2}{a},$$

mais l'emploi de cette méthode conduirait, dans d'autres cas analogues, à des fractions bientôt fort compliquées. Newton veut-il dire qu'il savait en 1676 intégrer les fractions rationnelles? le fait serait peu probable.

« Mais je fais peu de cas de ce procédé, parce que, lorsque les séries ne sont pas assez faciles à traiter, j'ai une autre méthode, que j'ai communiquée dernièrement (probablement à la Société Royale) et qui conduit mieux au résultat : elle consiste à former la courbe géométrique qui passe par un nombre quelconque de points donnés.

« Euclide enseigne à construire un cercle passant par trois points donnés; on sait aussi déterminer la conique qui passe par cinq points; on peut de même faire passer une courbe du troisième ordre par sept points (car je pourrais donner la description de toutes les courbes de cet ordre qui sont déterminées par sept points seulement); cela se fait géométriquement sans aucun calcul.

« Mais le problème dont il s'agit est d'un autre genre; et, quoique la chose, au premier abord, paraisse impossible, elle se fait cependant, et c'est l'une des plus belles que j'aie désiré connaître. »

Il s'agit évidemment ici de la méthode qui consiste à substituer une parabole à une courbe quelconque; quant à la phrase précédente, qui n'y a qu'un rapport éloigné, elle a été sans

doute rendue volontairement obscure, puisqu'il faut neuf points pour déterminer une courbe du troisième ordre et que Leibniz en conséquence ne pouvait pas savoir pourquoi Newton ne s'en donnait que sept.

« Il y a quelques théorèmes ayant une certaine affinité avec celui que Leibniz propose en établissant sa série pour la quadrature des sections coniques : j'en ai formé un catalogue pour la comparaison des courbes avec les sections coniques.

« Je puis en effet comparer géométriquement aux sections coniques toutes les courbes en nombre infiniment infini dont les ordonnées sont

$$\frac{dx^{n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{dx^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{\frac{5}{2}n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}}{x},\quad dx^{n-1}\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}},\quad dx^{2n-1}\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{dx^{n-1}}{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},\quad \ldots;$$

$$\frac{dx^{n-1}\sqrt{e+fx^n}}{g+hx^n},\quad \frac{dx^{2n-1}\sqrt{e+fx^n}}{g+hx^n},\quad \frac{dx^{3n-1}\sqrt{e+fx^n}}{g+hx^n},\quad \ldots;$$

$$\frac{dx^{n-1}}{(g+hx^n)\sqrt{e+fx^n}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{(g+hx^n)\sqrt{e+fx^n}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{(g+hx^n)\sqrt{e+fx^n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{d}{x}\sqrt{\frac{e+fx^n}{g+hx^n}},\quad dx^{n-1}\sqrt{\frac{e+fx^n}{g+hx^n}},\quad dx^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fx^n}{g+hx^n}},\quad \ldots;$$

quel que soit n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Je pense que ces théorèmes ne pourraient que difficilement être

trouvés par des transformations de figures telles que celles dont Jacob Grégory et d'autres se sont servis. »

Si Newton avait indiqué à Leibniz le principe de la transformation analytique au moyen de laquelle on peut ramener les quadratures des courbes qu'il vient de dénommer à celles des sections coniques, la simple énonciation de ce principe aurait pu éclairer la route à suivre, mais la longue liste des exemples qu'il cite ne pouvait servir qu'à dérouter son correspondant.

« Au reste, je n'avais pu, moi-même, arriver à aucune règle générale avant d'avoir renoncé à me servir des figures, et c'est par considération seulement des formules des ordonnées que je suis arrivé à réduire la difficulté. Quoi qu'il en soit, les théorèmes généraux énoncés plus haut, étant en mon pouvoir, on ne doutera pas, je pense, qu'il n'en soit de même de ceux qui se rapportent à des binômes plus simples, que l'on obtient en faisant nuls e, f, ou g, et supposant n égal à 1 ou à 2.

« Ces théorèmes fournissent des séries de plus d'une manière. »

Mais le texte en cet endroit est si peu clair que je suis obligé de me borner à le citer :

« *Nam primum* (il s'agit évidemment du premier exemple) *si ponatur* $f = 0$ et $n = 1$, *evadit*

$$\frac{d}{e + gz^2},$$

undè prodit series nobis communicata (d'où provient la série qui m'est communiquée, par Leibniz évidemment). *Sed si ponatur* $2eg = f^2$ *et* $n = 1$, *inde tandem obtinerem seriem*

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots,$$

pro longitudine quadrantalis arcus, cujus chorda est unitas. »

« Au reste, je considère la chose autrement : ces propositions en effet sont meilleures qu'utiles et le problème peut être résolu avec moins de peine. C'est ainsi que l'équation

$$x^3 - x = 1$$

paraît plus simple que

$$y^2 - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{20}} = 20.$$

Cependant il est clair que celle-ci est plus simple que la première, parce que le géomètre peut en tirer plus facilement la valeur de l'inconnue.

« C'est par une raison semblable que, pour obtenir les arcs de cercle, ou, ce qui revient au même, les secteurs des sections coniques, je préfère les séries composées des puissances des sinus.

« Car si l'on voulait calculer, avec vingt décimales, la longueur du quadrant, au moyen de la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots,$$

il faudrait en employer environ 5 000 000 000 de termes, pour l'évaluation desquels mille ans suffiraient à peine, et le calcul se ferait encore plus lentement au moyen de la tangente de 45°.

« Tandis que, si l'on se sert du sinus droit de 45°, il suffira de cinquante ou soixante termes de la série

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896} + \ldots\right),$$

et le calcul je pense demanderait seulement trois ou quatre jours.

« Mais ce n'est pas encore là le meilleur moyen pour calculer

la circonférence entière : la série qui donne l'arc de 30° en fonction de son sinus fournira en effet cet arc beaucoup plus tôt.

« Il ne serait pas plus difficile d'avoir l'aire du cercle, mais comme j'ai fait ce calcul, il me paraît bon de le rapporter en y joignant l'aire de l'hyperbole, qui se trouve de la même manière.

« Supposant le diamètre du cercle, ou l'axe transverse de l'hyperbole égaux à 1 et le sinus verse ou la flèche du segment égaux à x, le demi-segment de l'hyperbole ou du cercle sera

$$x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x \pm \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72} - \dots\right).$$

« Je crois que Leibniz, lorsqu'il a établi sa série pour la détermination du cosinus en fonction de l'arc, n'a pas fait attention que c'est la même que j'ai donnée pour le sinus verse.

« Il ne semble pas non plus avoir remarqué que j'ai l'habitude, pour diminuer le nombre des cas, de laisser aux variables leurs signes, tout en les représentant toujours par la même lettre, ainsi l'aire de l'hyperbole $xy = 1$, comptée de $x = 1$, est positive ou négative selon que le segment est à droite ou à gauche de l'ordonnée correspondante, mais je la représente dans les deux cas par la même lettre. »

Suivent différentes autres remontrances à Leibniz, puis Newton revient, pour la compléter, sur sa méthode de construction de la table des logarithmes hyperboliques, qu'il a déjà indiquée dans cette même lettre, et sur la manière de calculer les éléments d'une table des sinus. Il reprend ensuite l'explication de sa méthode pour développer en séries les racines d'une équation à deux variables. Enfin, considérant l'égalité entre une fonction et son développement en série comme une équation entre la variable

indépendante, regardée maintenant comme inconnue, et la fonction, considérée comme donnée, il résout cette équation en sens inverse.

Par exemple, de l'équation

$$z = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

où z représente l'aire de l'hyperbole $xy = 1$, comprise entre les ordonnées correspondant à 1 et à x, il tire

$$x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 - \ldots,$$

quam proximè.

« Les séries formées à l'aide d'une variable peuvent, de la même manière, être transportées à une autre. Ainsi l'arc z correspondant à un sinus x étant

$$x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \ldots,$$

on tire de là la valeur du même arc en fonction de la tangente :

$$t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \ldots.$$

« Mais, si l'on me demandait de trouver l'arc en fonction de la tangente, je ne me servirais pas de ce détour, mais je chercherais la chose directement.

« On tire aussi de là le moyen de développer en séries les fonctions de plusieurs variables, et les racines des équations affectées en sont en grande partie extraites, mais, pour ce dernier usage, je préfère la méthode que j'ai indiquée dans ma précédente lettre, comme plus générale et un peu plus expéditive, si l'on

tient compte des règles pour l'élimination des termes superflus.

« Quant au retour des aires aux lignes droites (ce sont les coordonnées de la limite supérieure) et autres problèmes analogues, on peut employer les théorèmes suivants.

Théorème I.

Soit

$$z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots,$$

on aura réciproquement

$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 + a^2d}{a^7}z^4$$
$$+ \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 + \ldots.$$

Théorème II.

Si

$$z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \ldots,$$

on aura réciproquement

$$y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7$$
$$+ \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \ldots.$$

« Il y a une autre méthode pour le retour des aires aux lignes droites, mais j'ai résolu de la tenir secrète.

« Lorsque j'ai dit que presque tous les problèmes étaient solubles, j'ai voulu parler surtout de ceux dont se sont occupés jusqu'ici les mathématiciens, ou sur lesquels les raisonnements

mathématiques peuvent avoir prise. Car il est possible d'en imaginer où se trouvent impliquées des conditions assez perplexes pour que nous ne puissions même les comprendre et bien moins encore supporter le poids des difficultés qu'ils comporteraient.

« Cependant pour ne pas paraître avoir annoncé plus de choses que je n'en pourrais faire, j'ai la solution du problème inverse des tangentes et d'autres encore plus difficiles, et, pour les résoudre, je me suis servi de deux méthodes, l'une plus particulière et l'autre plus générale : il me paraît bon de les consigner l'une et l'autre dès maintenant, par lettres transposées, *ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer :*

5a2cdæ10e2fh12i4l3m10n6o2qr7i11t10v3x : 11ab3c2d10eæg 10i2l4m7n6o3p3q6r5f11t7uvx, 3acæ4egh6i4l4m5n8oq4r3s6t4v, 2a2dæ5e3i2m2n2op3r5s2t2u (1).

« Ce problème inverse des tangentes, lorsque l'on donne la longueur de la tangente entre le point de contact et l'axe de la figure (l'axe des x) ne demande pas l'intervention de ces mé-

(1) Wallis, qui avait reçu communication de la traduction de ce logogriphe, l'a donnée plus tard ; la voici :

Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus : Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex quâ cœtera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos terminos assumptæ seriei.

C'est-à-dire : l'une des méthodes consiste à extraire une fluente de l'équation qui la contient avec sa fluxion : l'autre à exprimer l'inconnue par une série d'où l'on puisse tirer aisément tout le reste, et dans un arrangement des termes de l'équation, qui facilite le calcul des termes de la série.

On peut vérifier que cette traduction contient bien, dans chacun des membres de la phrase, le nombre de chacune des lettres indiqué dans l'anagramme.

thodes (parce que l'équation du problème, qui est

$$y\sqrt{1+y'^2}=a,$$

ne contient pas x et que, par suite, x est donné en fonction de y par une quadrature; mais Newton ne le dit pas parce qu'il ne tient pas à être clair); cependant la courbe est mécanique et sa détermination dépend de l'aire de l'hyperbole. (Car

$$x=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\cdot\Big)$$

« Il en est de même du problème où l'on donne la longueur de l'axe (des x) comprise entre la tangente et l'ordonnée.

« Mais il en est autrement lorsque la portion de l'axe, terminée à un point quelconque (et au pied de la tangente) entre dans un lien : (racine, etc.).

« Il me sera très agréable de recevoir communication de la méthode de Leibniz pour résoudre les équations affectées, surtout l'explication du cas où les indices des puissances sont fractionnaires, comme dans l'équation

$$20+x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{7}{11}}=0;$$

ou sourds (irrationnels) comme dans celle-ci :

$$\left(x^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{3\frac{2}{3}}}=y;$$

la chose, je crois, est évidente par ma méthode; autrement, je l'expliquerais.[1]

« Mais il est temps de mettre un terme à cette lettre; toutefois celle du très excellent Leibniz était assurément digne d'une réponse aussi complète. »

Cette longue lettre contient bien des affirmations exagérées et beaucoup de vanteries; mais nous ne voulons pas la discuter.

Nous nous bornons à remarquer qu'il en résulte bien nettement :

1° Que, dès avant 1676, Newton était en possession du calcul des fluxions, direct et inverse, et que, par conséquent, il a, dans son *Livre des Principes,* ainsi que dans sa théorie de la lumière, volontairement déguisé ses méthodes d'invention;

2° Qu'il n'a absolument rien communiqué à Leibniz de sa méthode des fluxions.

Mais nous allons voir que, tandis que Newton cachait sous des anagrammes impénétrables ses découvertes concernant la théorie des fluxions ou des dérivées, Leibniz lui exposait naïvement sa méthode différentielle, non pas, bien entendu, complète, il l'a perfectionnée depuis, mais déjà très avancée.

La lettre adressée sur ce sujet par Leibniz à Oldenbourg, pour être communiquée à Newton, est de juin 1677.

« J'ai reçu votre lettre, longtemps attendue, avec celle assurément très belle de Newton qui y était incluse.

« J'ai eu beaucoup de plaisir à apprendre par quelle voie il est parvenu à ses élégants théorèmes. Ce qu'il dit des interpolations de Wallis m'a aussi beaucoup plu, parce qu'on a ainsi une démonstration de ces interpolations qui, auparavant, ne paraissaient résulter que d'une simple induction; une partie s'en trouve établie par les tangentes.

« Je conviens avec Newton que la méthode de Sluze pour les tangentes n'est pas complète; et déjà depuis longtemps j'ai traité la question d'une manière bien plus générale par les différences

des ordonnées, au moyen de ce principe que la sous-tangente est à l'ordonnée comme la différence des abscisses est à celle des ordonnées, quel que soit l'angle que les ordonnées fassent avec l'axe, d'où il résulte qu'il n'y a, pour trouver les tangentes, qu'à rechercher les différences des ordonnées, celles des abscisses étant si l'on veut supposées égales. »

Leibniz veut dire par là : la différence des abscisses étant prise d'avance et la même pour toutes les courbes. Dans ce qui va suivre, il figure l'égalité par un signe qui ressemble à un II majuscule, et, d'autre part, il écrit $d^{-}x$, $d^{-}y$, au lieu de dx et dy, c'est-à-dire qu'il n'était pas encore fixé sur le choix de ses notations, mais cela importe peu.

« De là en nommant dy la différence entre deux ordonnées voisines (*proximarum*) et dx la différence entre les abscisses, il est évident que

$$d(y^2) = 2y\,dy$$

et

$$d(y^3) = 3y^2\,dy$$

et de même ensuite.

« Car soient deux ordonnées voisines, c'est-à-dire ayant une différence infiniment petite (*differentiam habentes infinite parvam*), savoir

$$y \quad \text{et} \quad y + dy,$$

puisque $d(y^2)$ est la différence des quarrés de ces deux droites,

$$d(y^2) = y^2 + 2y\,dy + (dy)^2 - y^2$$

ou, en omettant $y^2 - y^2$, qui se détruisent, ainsi que le quarré de la quantité infiniment petite, par les raisons énoncées dans la théorie des maximums et des minimums,

$$d(y^2) = 2y\,dy;$$

et de même pour les autres puissances.

« De là aussi on peut tirer les différences des quantités produites par multiplication. Ainsi

$$d(yx) = ydx + xdy$$

et

$$d(y^2x) = 2xydy + y^2dx.$$

« On trouvera par là aussitôt la tangente à la courbe

$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 + \ldots = 0,$$

par exemple, car l'équation convenant aussi bien au point $(x + dx, y + dy)$ qu'au point (x, y), en remplaçant dans cette équation x par $x + dx$, y par $y + dy$, développant les calculs et réduisant, il viendra

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy + \ldots}{b + dx + 2cy + 2gxy + hx^2 + \ldots} = -\frac{\text{ordonnée}}{\text{sous-tangente}},$$

ce qui s'accorde avec la règle de de Sluze.

« Mais ma méthode va beaucoup plus loin; non seulement elle peut s'appliquer au cas de plus de deux variables (ce qui est souvent très utile), mais aussi lorsque interviennent des irrationnelles, qui ne l'arrêtent en aucune façon; et il n'est pas nécessaire de faire disparaître ces irrationnelles, ce qui est indispensable pour appliquer la méthode de de Sluze, et augmente immensément les difficultés de calcul.

« Pour le faire voir, il suffit de considérer les irrationnelles les plus simples; or, si l'on prend x^z, on aura

$$d(x^z) = zx^{z-1}dx,$$

par exemple

$$d(\sqrt[2]{x}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

on aura de même

$$d\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots} = \frac{bdy+2cydy+\ldots}{3\sqrt[3]{(a+by+cy^2+\ldots)^2}}.$$

« La même méthode peut encore s'appliquer quand même l'équation comporte des radicaux superposés. »

Leibniz fait en effet le calcul sur l'équation

$$a+bx\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}+hx^2y\sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}}=0;$$

il emploie ici la singulière figure ∩ pour exprimer la multiplication.

« Il est extrêmement remarquable que dx et dy sont toujours dégagés (*semper extant extra vinculum irrationnale*).

« Je pense que ce qu'a voulu cacher Newton en ce qui concerne les tangentes, ne s'éloigne pas de ce que je viens de dire. »

La suite de la lettre concerne les quadratures et les séries. J'y remarque cette phrase :

« Toutes les courbes dont l'équation est différentielle sont quarrables; celle dont elle est dérivée exprimait l'aire.

« Ainsi l'aire de la courbe

$$x = \frac{b+cy+dy^2+ey^3+\ldots}{2\sqrt[2]{1+by+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{3}y^3+\frac{e}{4}y^4+\ldots}}$$

est

$$\omega = \sqrt[2]{1+by+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{3}y^3+\frac{e}{4}y^4\ldots.}\ \text{»}$$

Mais le texte, en cet endroit, est à peu près inintelligible, parce que au lieu de $2\sqrt[2]{1+by+\ldots}$, on a écrit $z\sqrt[z]{1+by+\ldots}$.

Il est vrai que Leibniz pourrait bien avoir commis par inadver-

tance la faute de croire

$$d(\sqrt[n]{x}) = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}};$$

cette faute se retrouve en effet plusieurs fois dans le texte. Je l'ai corrigée plus haut dans la différentielle de $\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots}$, pui était écrite sous la forme

$$\frac{bdy + 2cydy + \ldots}{3\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots}};$$

mais elle est encore reproduite dans l'exemple suivant, ce qui fait que je n'ai pas transcrit le résultat.

La fin de la lettre, ainsi qu'une dernière, en date de juillet 1677, contiennent des demandes d'éclaircissements sur différents points de la communication précédente de Newton.

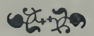
Ainsi, en résumé, Newton n'a rien communiqué à Leibniz touchant le calcul des fluxions; Leibniz lui a transmis sur le calcul différentiel une note absolument explicite et bien supérieure, tant pour le fond que pour la forme, à ce que contient le *Livre des Principes* sur les *moments* ou *incréments.* Et c'est Leibniz qu'on accuse de plagiat!

Tandis que Newton écrit assez dédaigneusement dans le *Livre des Principes* que Leibniz lui a communiqué une méthode approchant de la sienne, Leibniz proclame dans tous ses écrits, mais sans en avoir eu aucune preuve avant 1704, que Newton est aussi bien que lui-même en possession de la méthode différentielle. Newton fait retirer d'une nouvelle édition du *Livre des Principes* la reconnaissance des droits de Leibniz et, lors du procès, va jusqu'à dire : « A l'égard du scholium qui est mis à la

suite du second lemme du second livre de mes *Principes Mathematiques* et qu'on a tant cité contre moi, il n'a pas été écrit dans le dessein de faire honneur de ce lemme à M. Leibniz, mais bien de m'en assurer la possession. »

N'eût-il pas mieux fait, après s'être sottement privé lui-même de la gloire d'avoir fondé l'analyse infinitésimale, d'en faire silencieusement son *mea culpa*, plutôt que de chercher à couvrir sa maladresse par une mauvaise action?

Mais il était certain de faire voter son entourage comme il le voudrait; et il aura pensé, comme dit Pascal, que des moines suppléent parfaitement à des raisons.



De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus. C'est-à-dire : *Du véritable rapport du cercle au quarré circonscrit, en nombres rationnels.* (*Acta Eruditorum*, 1682.)

Il s'agit de la formule de l'aire du cercle dont le diamètre est pris pour unité linéaire :

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots$$

Mais Leibniz n'en donne pas la démonstration, que, du reste, je ne trouve dans aucun de ses écrits.

Nous avons vu que, dans une de ses lettres, Leibniz annonçait à Newton qu'il avait trouvé pour l'aire d'un secteur d'une conique, compris entre le rayon dirigé suivant l'axe focal et un rayon quelconque, l'expression

$$\frac{t}{1}\pm\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\pm\frac{t^7}{7}+\ldots,$$

où t désigne le rapport au demi-axe focal de la portion de la tangente menée au sommet considéré, comprise entre ce sommet et la tangente à la seconde extrémité de l'arc, en supposant d'ailleurs que l'unité de surface fût le rectangle ab des demi-axes de la conique; les signes supérieurs convenant au cas de l'hyperbole et les signes inférieurs au cas de l'ellipse.

Or si l'on suppose que la conique soit un cercle et que le secteur en soit un quadrant, le rapport t est alors égal à 1 et l'aire de ce quadrant rapporté au quarré construit sur le rayon est

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$

mais la même série représente aussi bien l'aire entière du cercle rapporté au quarré construit sur le diamètre.

Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum, quæ centrum habent, etc., c'est-à-dire : *Commune quadrature arithmétique des sections coniques à centres, etc.* (*Acta Eruditorum*, 1691.)

Nous trouvons dans cet article, outre les formules contenues dans le précédent, les développements en séries du sinus droit et du sinus verse :

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et

$$\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots;$$

ainsi que ceux du logarithme hyperbolique de $(1 + n)$ en fonction

de n, et de n en fonction du logarithme représenté par l

$$l = \frac{1}{1}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \ldots,$$

et

$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Mais les démonstrations manquent. Nous avons déjà trouvé ces développements dans une des lettres adressées par Leibniz à Newton. Leibniz, qui sans doute les avait trouvés seul, ne les donne plus comme étant de lui, mais comme ayant été publiés par lui, par Mercator, par Newton et par Gregory. Elles serviront, dit-il, de tables trigonométriques, car il n'est pas toujours possible d'emporter ces tables par mers et par terres (*neque enim semper tabulas per maria et terras circumferre in potestate est*).

L'article se termine par les solutions de différents problèmes relatifs à la navigation : En supposant que le navire ait marché sous le même rumb de vent, c'est-à-dire que le sillage ait conservé une inclinaison constante sur les méridiens successifs, trouver le chemin parcouru lorsque l'on connaît les latitudes extrêmes et le rumb de vent; trouver la différence des longitudes extrêmes; etc.

Leibniz établit les formules intégrales des inconnues et développe ces intégrales en séries.

Supplementum Geometriæ practicæ sese ad problemata transcendentia extendens, ope novæ methodi generalissimæ per series infinitas, c'est-à-dire : *Supplément de Géométrie pratique, s'étendant aux problèmes transcendants, par le moyen d'une méthode nouvelle et très générale par les développements en séries.* (*Acta Eruditorum*, 1693.)

La méthode que propose ici Leibniz est celle des coefficients indéterminés.

« Il m'a, dit-il, paru possible de trouver plus commodément, et par une méthode plus générale, les séries découvertes par Mercator et par Newton au moyen de divisions et d'extractions de racines, en supposant ces séries comme si elles étaient connues, et en en déterminant successivement les coefficients. La méthode s'éclaircira par un exemple simple mais approprié à la question, en cherchant le logarithme d'un nombre et le nombre correspondant à un logarithme.

« Soit le nombre

$$\frac{a+x}{a},$$

son logarithme est

$$y=\int\frac{dx}{a+x},$$

par conséquent

$$dy=\frac{dx}{a+x}.$$

Il en résulte

$$a\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a+x} \quad \text{et} \quad x\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a+x},$$

d'où

$$a\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=1.$$

Soit donc

$$y=bx+cx^2+ex^3+fx^4+\ldots,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx}=b+2cx+3ex^2+4fx^3+\ldots,$$

et, en substituant dans l'égalité précédente, il viendra

$$\begin{aligned}1 = ab &+ 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 + \ldots\\ &+ \quad bx + \;\; 2cx^2 + \;\; 3ex^3 + \ldots,\end{aligned}$$

égalité qui devra avoir lieu quel que soit x, d'où résulte

$$b = \frac{1}{a}, \quad c = -\frac{1}{2a^2}, \quad e = \frac{1}{3a^3}, \quad f = -\frac{1}{4a^4} \cdots$$

c'est-à-dire

$$y = \mathrm{L}\left(\frac{a+x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots \text{ »}$$

Leibniz trouve

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \ldots,$$

mais il n'arrive à ce résultat qu'à la suite de plusieurs fautes ou confusions.

En premier lieu, ce qu'il entend par le logarithme de $\frac{a+x}{a}$, c'est l'aire de l'hyperbole $XY = a^2$, comprise entre les ordonnées $X = a$ et $X = x$; c'est pourquoi il pose, *ob quadraturam hyperbolæ*,

$$y = \int \frac{a^2 dx}{a+x};$$

mais il en conclut

$$dy = \frac{a dx}{a+x},$$

ou

$$\frac{a dy}{dx} + \frac{x dy}{dx} - a = 0,$$

de sorte qu'il pose

$$\left.\begin{aligned} &a(b + cx + 3aex^2 + \ldots) \\ +\, &x(b + 2cx + 3aex^2 + \ldots) \\ -\, &a \end{aligned}\right\} = 0,$$

d'où il tire

$$b = 1, \quad c = -1, \quad e = 1, \quad \ldots.$$

Dans son hypothèse, il aurait dû trouver

$$y = a\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \dots\right).$$

Il trouve de même, par le moyen de fautes analogues, que si y est le logarithme de $\frac{a+x}{a}$,

$$x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2.a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \dots.$$

Il passe de là au développement du sinus en fonction de l'arc. Soient y l'arc, x le sinus droit et a le rayon : on a évidemment

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2.$$

d'où, en différentiant par rapport à y,

$$a^2 dx d^2x + x dx dy^2 = 0,$$

ou

$$a^2 d^2x + x dy^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x + a^2 \frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

Si donc on pose

$$x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 + \dots,$$

il vient

$$\left.\begin{array}{l} by + cy^3 + ey^5 + fy^7 \dots \\ + a^2(3.2.cy + 5.4.ey^3 + 7.6.fy^5 + \dots \end{array}\right\} = 0,$$

égalité qui doit avoir lieu identiquement. Il en résulte, en faisant $b = 1$, comme cela doit être,

$$c = -\frac{1}{1.2.3a^2}, \quad e = \frac{1}{1.2.3.4.5a^4}, \quad f = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7a^6}; \dots$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} \cdots$$

Leibniz termine par la recherche de l'équation de la courbe telle que le rectangle compris entre la tangente et une constante a soit égal au quarré de l'ordonnée moins le rectangle de l'abscisse et de l'ordonnée. L'équation différentielle de cette courbe serait

$$ay\frac{dx}{dy} = y^2 - xy,$$

c'est-à-dire

$$a\frac{dx}{dy} = y - x.$$

Si l'on pose

$$x = by + cy^2 + ey^3 + fy^4 + \ldots$$

on trouve aisément

$$b = 0, \quad c = -\frac{1}{2a}, \quad e = \frac{1}{2.3.a^2} \cdots,$$

et il en résulte, pour l'équation de la courbe,

$$\frac{x}{a} = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

Leibniz a trouvé ailleurs que si y est le logarithme de $\frac{a}{a-x}$, $\frac{x}{a}$ est fourni par le développement précédent : il en conclut la nature de la courbe et termine par cette remarque que les développements en séries peuvent quelquefois permettre de découvrir la valeur transcendante d'une inconnue.

De dimensionibus figurarum inveniendis ou *de la mesure des figures* (*Acta Eruditorum*, 1684.), et *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, ou *De la nouvelle Géométrie et de l'analyse des indivisibles et des infinis.* (*Acta Eruditorum*, 1686.)

Dans ces deux articles qui tendent au même but et dont le second a en partie pour objet de rectifier quelques erreurs contenues dans le premier, Leibniz prend d'abord à partie Descartes pour avoir rejeté de la Géométrie les courbes qui ne peuvent être représentées par des équations ordinaires entre les deux coordonnées. Il voit là une erreur de notre philosophe, comme si chacun n'était pas libre de circonscrire l'objet de ses études, en laissant aux autres la faculté de l'étendre. Mais il propose avec raison de nommer algébriques, plutôt que géométriques, les courbes dont les équations ont des degrés déterminés, et transcendantes les autres.

Il se propose ensuite de rechercher les courbes algébriques dont les quadratrices seraient elles-mêmes algébriques. Il entend par quadratrice d'une courbe une autre courbe telle que le rectangle de son ordonnée et d'une longueur fixe resterait constamment égal au segment de la proposée, compris entre une ordonnée fixe et l'ordonnée correspondant à l'abscisse considérée de la quadratrice.

Il croit résoudre la question en prenant successivement les équations les plus générales des courbes de tous les degrés, formant celles des courbes quarrables par celles-ci et cherchant à identifier l'équation de la courbe qu'on voudrait quarrer à l'une de celles qu'on aurait trouvées quarrables. Inutile de dire qu'il se

borne à conseiller cette méthode; quant à la suivre, il l'essaye sur un seul exemple et se trompe.

Nous remarquons dans le second article le premier emploi qui ait été fait du signe d'intégration, et l'équation de la cycloïde. écrite sous la forme

$$y = \sqrt{x2 - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Dans cette équation les abscisses x sont comptées perpendiculairement à la base de la cycloïde et le rayon du cercle générateur est pris pour unité.

On voit que Leibniz connaissait en 1686 la différentielle d'un *arc sinus* ou d'un *arc cosinus.* Nous avons vu que la formule de la fluxion correspondante ne se trouve ni dans le livre des *Principes de la Philosophie naturelle*, ni dans l'*Optique* de Newton.



Nous passons aux Ouvrages de Leibniz qui se rapportent à la Mécanique.

Nous trouvons dans une lettre à l'auteur du *Journal des Savants*, de mars 1675, *touchant le principe de justesse des horloges portatives*, une observation qui équivaut à l'invention de la manivelle à double effet : « Ayant considéré qu'un ressort étant rebandé au même point se débandera toujours en même temps, s'il trouve la même liberté de se débander subitement, j'ai inféré qu'on en pourrait employer deux, dont l'un jouerait pendant que le premier mobile de l'horloge rebanderait l'autre; car ainsi il n'importera pas s'il le rebande plus ou moins vite. pourvu qu'il le rebande avant que l'autre achève de se débander,

et, par conséquent, l'un délivrant l'autre sur la fin de son mouvement, ce jeu durera toujours uniformément, et en laissant passer à chaque retour ou période de ces deux ressorts, une dent d'une certaine roue entraînée par le mouvement ordinaire et qui compte les secondes, ou autres parties du temps, nous aurons une horloge ou montre, telle que nous pourrons désirer. »

Nous ne dirons qu'un mot de la querelle entre Leibniz et les Cartésiens au sujet du principe de la conservation de la quantité de mouvement. Leibniz ne s'entendait pas beaucoup mieux lui-même que Descartes, parce que, comme Descartes, il admettait la notion de la force qu'a un corps en mouvement et, de même que son précurseur, raisonnait sur cette force, sans la définir mieux que lui.

Descartes entendait par force d'un corps le produit de son poids par sa vitesse, mais il donnait au même mot le sens de ce que nous appelons aujourd'hui travail, par exemple dans cet énoncé : *il faut autant de force pour élever un poids de 1 livre à 4 pieds que pour élever un poids de 4 livres à 1 pied.* Bien entendu, il employait encore le même mot dans un troisième sens, celui de poids, dans les questions d'équilibre.

Quant à Leibniz, autant du moins qu'on peut en juger, il entendait par force d'un corps en mouvement, sa force vive, qui se manifeste par la hauteur à laquelle le corps pourrait remonter. Il dit, par exemple, dans une de ses réponses à l'abbé de Conti : *En cas que l'on suppose que toute la force d'un corps de 4 livres, dont la vitesse est de 1 degré, doit être donnée à un corps de 1 livre, celui-ci recevra non pas une vitesse de 4 degrés, suivant le principe cartésien, mais de 2 degrés seulement, parce qu'ainsi*

les corps ou poids seront en raison réciproque des hauteurs auxquelles ils peuvent monter en vertu des vitesses qu'ils ont, or ces hauteurs sont comme les carrés des vitesses.

Les deux énoncés de Descartes et de Leibniz ne sont que du galimatias double (je prends le mot dans le sens que lui donne Voltaire). Toutefois, l'idée de Descartes, convenablement éclaircie, est devenue le théorème de la conservation de la somme des quantités de mouvement, en projection sur un axe arbitraire, dans le cas où le système matériel considéré n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, et Leibniz a eu tort de méconnaître cette vérité; mais Descartes faisait un singulier usage de son principe dans la question du choc des corps, et Leibniz a eu raison de renverser les conclusions de notre philosophe.

Quant à l'idée de Leibniz, elle a donné lieu au théorème des forces vives, mais Leibniz faisait un aussi mauvais usage de son principe que Descartes du sien : Ainsi, reprenons son énoncé, en le renversant toutefois, pour rendre l'hypothèse physiquement réalisable, car je ne verrais aucun moyen de faire passer la force d'un corps de 4 livres dans un corps de 1 livre, à moins d'en escamoter 3; supposons donc qu'un corps mou, pesant 1 livre, et animé d'une vitesse 4, vienne choquer un autre corps mou, en repos et pesant 3 livres : l'ensemble, qui sera le second corps de l'énoncé de Leibniz, aura bien toute la force du premier, selon Descartes; il pèsera 4 livres, mais sa vitesse ne sera que 1, tandis que, d'après Leibniz, elle devrait être 2 : en effet, la vitesse du premier corps étant 4 et celle du second x, les hauteurs h et h' auxquelles ils pourraient remonter satisferont à la condition

$$\frac{16}{x^2} = \frac{h}{h'};$$

mais ces hauteurs, d'après Leibniz, devraient être en raison réciproque des poids 1 et 4, x serait donc donné par la proportion

$$\frac{16}{x^2} = \frac{4}{1}, \quad \text{d'où} \quad x = 2.$$

Leibniz trouve 2 parce qu'il suppose mentalement que la force vive du premier corps a passé entièrement dans le second, mais c'est une singulière manière de répondre aux gens que de les mettre en défaut en changeant leur hypothèse, sans le dire explicitement; au reste il convient de remarquer que Descartes avait raison d'admettre dans tous les cas des corps mous ou élastiques le fait de la conservation de la quantité de mouvement, et que Leibniz avait tort de supposer, aussi dans tous les cas, que la quantité de force vive restait la même après qu'avant le choc.

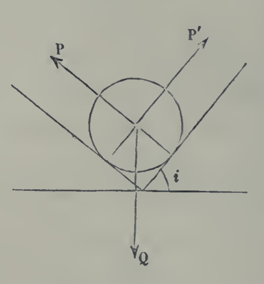
Demonstratio Geometrica Regulæ apud staticos receptæ DE MOMENTIS GRAVIUM IN PLANIS INCLINATIS, *nuper in dubium vocatæ : et solutio casus elegantis in Actis novemb.* 1684 *propositi*, DE GLOBO DUOBUS PLANIS ANGULUM RECTUM FACIENTIBUS SIMUL INCUMBENTE; *quantum unumquodque planorum prematur, determinans*. C'est-à-dire, *démonstration de la règle reçue en statique, mais récemment mise en doute, touchant les pressions exercées par les corps pesants sur les plans inclinés, et solution du cas élégant proposé dans les Actes* de novembre 1684, *relativement à une sphère placée entre deux plans inclinés rectangulaires, avec la détermination de la pression exercée sur chacun des deux plans.*

Nous ne mentionnons cet article que pour montrer combien

la Mécanique avait encore fait peu de progrès à cette époque, ou, au moins, combien les principes les plus élémentaires en étaient encore peu répandus.

Si l'on désigne par Q le poids de la sphère, par i l'inclinaison de l'un des plans sur l'horizon, par P la pression exercée par la

Fig. 17.



sphère sur ce plan et par P' la pression exercée sur l'autre plan, les équations du problème sont évidemment

$$P\cos i + P'\sin i = Q$$

et

$$P^2 + P'^2 = Q^2;$$

elles donnent immédiatement

$$P' = Q\sin i,$$

et

$$P = Q\cos i.$$

Cependant les formules auxquelles arrive Leibniz équivalent à

$$P' = \frac{Q}{2}(1 - \cos i + \sin i).$$

et

$$P = \frac{Q}{2}(1 - \sin i + \cos i);$$

mais la fausseté du résultat n'est rien en comparaison de la sin-

gularité du raisonnement qui y conduit : Leibniz commence par reconnaître, en accordant les plus grandes louanges à l'inventeur de la chose, que la pression exercée par un corps pesant sur le plan incliné qui le supporte se compose de deux parties, celle qui vient de la tendance du corps à tomber suivant la ligne de plus grande pente du plan, et celle.... mais comme il est difficile de traduire ce qui manque de sens, je préfère citer le texte latin : *patet globum in plano aliquo inclinato duplex exercere momentum, unum quo decliviter descendere tendit, alterum quo planum declive premit, quæ duo simul absolutum, seu totale gravis momentum constituunt.*

Ce non-sens admis, Leibniz amalgame les deux pressions exercées sur chacun des plans et détermine les rapports du *total* aux parties ; mais comme, ces parties restant inconnues, la question ne se trouverait pas résolue par là, il recourt à cette nouvelle idée, plus étrange encore que la première, de faire la somme des deux totaux égale au poids de la sphère.

C'est par cette médiation qu'il trouve les formules que nous avons transcrites et il constate avec bonheur que, en effet,

$$P + P' = Q.$$

Il ajoute bonnement : Cette méthode est très avantageuse, quand on est embarrassé. Elle est peu géométrique et, en quelque sorte, métaphysique ; on pourra l'appeler provisionnelle, jusqu'à ce qu'elle soit établie par une autre voie plus conforme aux notions ordinaires de Géométrie et plus rigoureuse, ce que je me réserve de faire, aussitôt que j'aurai du loisir.

Methodus autem qua usi sumus, per regulam alternativorum, etiam in aliis casibus perplexis enodandis magnum usum

habere potest; quamvis non sit pure Geometrica, sed quodammodo Metaphysica simul; unde provisionalis censeri potest, donec idem demonstretur alia via, magis secundum vulgares notiones geometrica, et rigorosa, quam ubi vacaverit, exhibere mihi reservo.

Ubi vacaverit revient trop souvent dans les Ouvrages de Leibniz. Il lui aurait mieux valu de soigner davantage ses articles et de ne pas se laisser autant absorber par la contemplation des monades; cela eût mieux valu aussi pour le progrès des idées et des méthodes.

Règle générale de la composition des mouvements et application à la construction de deux problèmes. (*Journal des Savants*, 1693.)

Si les différents mouvements qu'il s'agit de composer sont tels qu'ils amèneraient le mobile, au bout du même temps, de l'origine des coordonnées aux points dont les coordonnées seraient respectivement

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n),$$

ce mobile, dans le mouvement résultant, sera, au bout du même temps, transporté de l'origine au point qui aurait pour coordonnées

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \quad z_1 + z_2 + \ldots + z_n.$$

Leibniz connaît cette règle qu'il énonce ensuite, mais il préfère la suivante : si AB, AC, AD, AE, etc., représentent les divers mouvements, que G soit le centre de gravité de tous les points B, C, D, E, etc., et que sur la droite AG prolongée on prenne AM

égale à autant de fois AG qu'il y a de mouvements composants, le mouvement résultant sera AM.

On remarquera dans cet énoncé une tendance bien nette de l'esprit de l'auteur à la généralisation des idées. Quant à la démonstration, elle est au moins bizarre, la voici en abrégé : « Le mobile ne pouvant pas aller en même temps de plusieurs côtés, se dirigera vers le centre de gravité de tous les points de tendance, mais il ira d'autant plus loin qu'il y aura plus de tendances. Ainsi, *il arrivera au mobile la même chose qui arriverait à son centre de gravité si ce mobile se partageait également entre les mouvements composants, pour satisfaire parfaitement à tous ensemble.* Car, le mobile étant partagé également entre quatre tendances, il ne peut échoir à chacune qu'une quatrième partie du mobile, qui devra aller quatre fois plus loin, pour avoir autant de progrès que si le mobile tout entier avait satisfait à chaque tendance. Etc. »

Leibniz craint que cette démonstration ne paraisse pas très satisfaisante et il a sans doute raison.

L'énoncé du premier des deux problèmes qu'il traite à l'aide de cette méthode est à peu près inintelligible : Leibniz suppose qu'un style tende en même temps un grand nombre de fils et il cherche la tangente à la courbe décrite par la pointe de ce style; je ne comprends pas très bien ce mécanisme; quoi qu'il en soit, voici la solution du problème d'après Leibniz : « Du point A de la courbe, soit décrit un cercle quelconque coupant les filets aux points B, C, D, etc.; soit trouvé le centre de gravité de ces points, savoir G; la droite AG sera perpendiculaire à la courbe, ou bien une droite menée par A normale à AG sera la tangente qu'on cherche. En voici la raison qui a servi de principe d'invention :

C'est qu'on doit considérer que le style qui tend les filets, pourra être conçu comme ayant autant de directions égales en vitesse entre elles qu'il y a de filets : car il les tire également, et comme il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée (qui doit être dans la perpendiculaire à la courbe) passe par le centre de gravité d'autant de points qu'il y a de filets, et ces points, à cause de l'égalité des tendances dans notre cas, sont également distants du style, et tombent ainsi dans les intersections du cercle avec les filets. »

Le *second problème* n'est autre que celui de la composition des forces concourantes; Leibniz l'énonce ainsi : *un même mobile étant poussé en même temps par un nombre infini de sollicitations, trouver son mouvement.* « Cherchez, dit-il, le centre de gravité du *lieu* de tous les points de tendance de ces sollicitanions et la direction composée passera par ce centre; mais les vitesses produites seront proportionnelles aux grandeurs des lieux. Les lieux peuvent être des lignes, des surfaces, ou même des volumes. »

On doit reconnaître là une idée peu utile, sans doute, pour la pratique, mais assurément ingénieuse; quant au principe de la composition des forces appliquées à un point matériel, jamais il n'avait encore été énoncé dans des termes aussi précis et aussi généraux.

De resistentiâ medii et motu projectorum gravium in medio resistente, ou *De la résistance des milieux et du mouvement des projectiles pesants dans un milieu résistant* (*Acta Eruditorum*, 1689) et *Addition sur le même sujet* (*Acta Eruditorum*, 1691).

Leibniz, à l'époque où il écrivait cet article, devait savoir, au

moins par ouï-dire, que les questions dont il allait s'occuper étaient déjà traitées dans le premier volume du livre des *Principes de la Philosophie naturelle*, qui avait paru en 1687; l'ignorance, quand même elle serait réelle, non seulement ne saurait être admise en pareil cas, mais serait encore peu convenable. Aussi pensé-je que c'est délibérément que Leibniz s'est jeté dans la mêlée où il devait finalement avoir le dessous, au-moins de son vivant.

Son article est mauvais à deux points de vue : le premier que, suivant la mauvaise habitude qu'il avait puisée dans son éducation première, Leibniz se lance tout d'abord dans des considérations *à priori*, on ne peut plus mal fondées, que Newton, au contraire, a toujours soigneusement évitées; le second que, pouvant traiter par le calcul les questions qu'il aborde, ce qui eût été le moyen de se donner l'avantage, il se borne à donner des résultats, au risque de se laisser accuser d'avoir pris dans Newton ceux qui étaient exacts.

Il commence par distinguer dans la résistance du milieu deux parties, l'une absolue (*absoluta*) et l'autre relative (*respectiva*), qu'il définit d'ailleurs fort mal. Il s'efforce ensuite de trouver par induction la loi de la résistance. Il n'y arrive naturellement pas, et, alors, tombe dans des hypothèses comme celle-ci, par exemple : *Si le mouvement du mobile est par lui-même uniforme* (c'est-à-dire, probablement, si le mobile n'est soumis à aucune autre force que la résistance du milieu) *mais qu'il soit retardé proportionnellement à l'espace déjà parcouru, etc.*, hypothèse en vertu de laquelle la résistance, pour la même vitesse actuelle, pourrait devenir infinie, si le mobile était parti avec une vitesse suffisante d'un point suffisamment éloigné.

Après avoir énoncé dans toutes sortes d'hypothèses, mais sans démonstrations, une foule de résultats que je n'ai pas cherché à vérifier, Leibniz termine par ces mots assez inconsidérés : « On pourrait déduire de là bien des conséquences utiles dans la pratique, mais il nous suffira d'avoir jeté les bases géométriques dans lesquelles consistait la plus grande difficulté (*nobis nunc fundamenta geometrica jecisse suffecerit, in quibus maxima consistebat difficultas*). Au reste tout cela se rattache à notre analyse des infinis, c'est-à-dire au calcul des sommes et des différences (*omnia autem respondent nostræ analysi infinitorum, hoc est calculo summarum et differentiarum*). »

Je ne dis pas non, mais il fallait se donner la peine de le montrer. Je sais bien qu'on pourrait réclamer en faveur de tous ces opuscules l'indulgence qu'on accorde ordinairement aux articles de journaux, mais pourquoi, étant Leibniz, raisonner comme le *Mercure galant?* Il y avait, dit-il, à éviter la prolixité, *sed vitanda erat prolixitas;* il l'eût bien mieux évitée en se bornant à l'une des hypothèses examinées par Newton, et traitant la question en quelques mots par le calcul. Mais on croirait qu'il tient à se jeter dans la gueule du loup; il est vrai que sa candeur l'empêchait peut-être de croire aux loups.

L'*Addition*, que Leibniz n'a écrite, dit-il, qu'après avoir lu les recherches de Newton et d'Huyghens sur le même sujet, contient des explications assez embarrassées sur la distinction entre la résistance *absolue* et la résistance *relative;* mais Leibniz y donne, pour le cas d'un mobile pesant retardé proportionnellement à la vitesse, la formule du temps

$$t = \int \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2},$$

où a désigne la vitesse maximum, que le mobile n'atteindrait qu'au bout d'un temps infini, comme il le remarque fort bien; il en déduit même cette autre formule :

$$t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \frac{1}{7}v^7 + \ldots$$

la vitesse maximum étant prise pour unité. Il aurait donc pu donner une meilleure forme à son premier article.

Tentamen de natura et remediis resistentiarum in machinis, quæ a corporum super-incessu oriuntur. C'est-à-dire : *Essai sur la nature des résistances qui naissent, dans les machines, du contact des corps et sur les moyens de les diminuer.* (*Miscellanea Berolinensia.*)

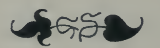
Ce mémoire a peu d'importance, mais il atteste les tendances de l'auteur à faire servir les Sciences aux choses pratiques et utiles.

Leibniz fait dériver le frottement des aspérités que présentent les surfaces des corps, aspérités qui engrènent les unes dans l'intervalle des autres, comme les dents de deux roues. Le glissement de deux corps l'un sur l'autre exige l'écrasement de ces aspérités, ou bien que l'un des deux corps saute par-dessus elles.

Il loue Amontons d'avoir renversé l'erreur commune où l'on était avant lui, que le frottement dépendait de l'étendue de la surface de contact; mais il formule quelques objections, peu recommandables d'ailleurs, contre la proposition établie par ce savant que le frottement est proportionnel à la pression.

Il définit bien le mouvement de glissement, celui de roulement et le mouvement mixte.

Les principaux moyens de diminuer le frottement sont d'enduire les surfaces frottantes de matières grasses; mais surtout de substituer le roulement au glissement.



Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. C'est-à-dire : *Nouvelle méthode pour les maximums, les minimums et les tangentes, que n'arrêtent ni les fractions ni les irrationnelles, et singulier genre de calcul pour cela.*

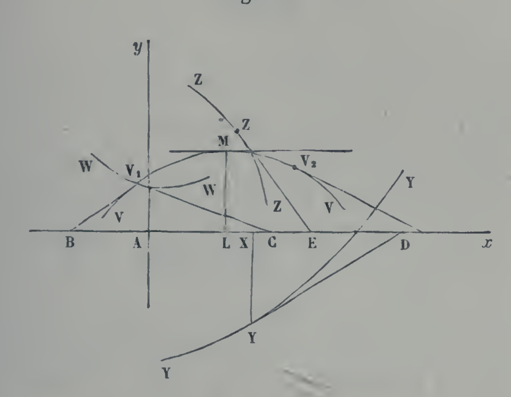
Ce mémoire a une si grande importance et il est si court que nous en donnerons une traduction presque complète.

Le texte publié dans les *Acta Eruditorum* et reproduit dans l'édition par Dutens des œuvres de Leibniz, donnée à Genève en 1768, contient, dès les premières lignes, deux erreurs inexplicables, qu'il est impossible, en tout cas, d'attribuer à Leibniz et dont nous ne tiendrons pas compte dans notre traduction : les lettres sont tellement placées dans la première figure que le texte fait dire à Leibniz que la différentielle de l'ordonnée est à celle de l'abscisse comme l'ordonnée est à la tangente (pour la sous-tangente). Ceci ne serait rien; mais, aussitôt après, on trouve ce singulier énoncé, que, si deux courbes, rapportées aux mêmes axes, se coupent, les différentielles de leurs ordonnées, correspondant à un même accroissement de l'abscisse, à partir du

point d'intersection, sont égales. Je ne vois pas comment le manuscrit de l'auteur a pu donner lieu à une pareille coquille; mais il est clair que, si Leibniz a corrigé son épreuve, l'enthousiasme avait paralysé sa clairvoyance.

« Soient (*fig.* 18) un axe AX et diverses courbes VV, WW,

Fig. 18.



YY, ZZ, dont les ordonnées normales à l'axe, VX, WX, YX, ZX seront désignées respectivement par v, w, y, z, la partie retranchée de l'axe (*abscissa ab axe*), AX, étant représentée par x. »

L'usage de figurer l'axe des y n'avait pas encore été adopté, mais nous rétablissons cet axe.

« Soient VB, WC, YD, ZE des tangentes à ces courbes, coupant l'axe aux points B, C, D, E; soient d'ailleurs dx une longueur prise à volonté et dv, dw, dy, dz d'autres longueurs qui soient à dx comme VX, WX, YX, ZX sont à XB, XC, XD, XE; cela posé, les règles du calcul seront les suivantes :

« Soit une constante a, da sera nul et $d(ax)$ sera égal à $a\,dx$.

« *Addition et soustraction :* Si

$$v = z - y + w + x$$

on aura

$$dv = dz - dy + dw + dx.$$

« *Multiplication :* Si

$$y = xv,$$

on aura

$$dy = d(xv) = x\,dv + v\,dx.$$

« *Division :* Si

$$z = \frac{v}{y},$$

on aura

$$dz = \frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{y^2},$$

« A l'égard de ces signes, il faut bien remarquer que, si, dans le calcul, au lieu d'une lettre, on introduit sa différentielle, il faut conserver les signes, c'est-à-dire à la place de $+z$, écrire $+dz$, et, à celle de $-z$, écrire $-dz$, comme il appert de la règle pour l'addition et la soustraction.

« Mais quand on en vient à l'exégèse des valeurs, par exemple si l'on considère la relation de z à x, alors il faut voir si dz est positif ou négatif. Ainsi (d'après la figure), comme la tangente en un point quelconque de ZZ n'est pas dirigée vers A, mais du côté opposé, c'est-à-dire au delà de X, de sorte que les z décroissent quand les x croissent, dz sera négatif. Mais sur la courbe VV les ordonnées tantôt croissent et tantôt décroissent, dv sera donc tantôt positif, tantôt négatif; le premier cas se présente en V_1, le second en V_2. »

Leibniz ne donne pas encore des signes contraires aux ordonnées de points situés de part et d'autre de l'axe des x. Dès lors, l'idée n'aurait pu lui venir d'inclure le signe de l'accoissement dans la notation d'une différentielle. C'est pourquoi il écrit si singulièrement, au point de vue où nous sommes aujourd'hui placés,

$$d\,\frac{v}{y} = \frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}.$$

« Mais dv n'est ni positif ni négatif au point M, où les v ne croissent ni ne décroissent, mais restent sans variation (*in statu sunt*), de sorte que $dv = 0$, car $+0 = -0$, et en ce point l'ordonnée LM est maximum (elle serait minimum si la courbe tournait sa convexité à l'axe); et la tangente à la courbe en M n'est tournée ni du côté de A, ni de l'autre côté : elle est parallèle à l'axe.

« Si dv était infini par rapport à dx, la tangente serait perpendiculaire à l'axe, ou bien ce serait l'ordonnée elle-même. Si dv et dx étaient égaux, la tangente ferait avec l'axe un angle d'un demi-droit.

« Si, l'ordonnée v croissant, son accroissement ou sa différentielle, dv, croît aussi, c'est-à-dire si, dv étant déjà positif, sa différentielle ddv est aussi positive, la courbe tourne sa concavité à l'axe. Il en serait de même si la différentielle et la différentielle de la différentielle étaient toutes deux négatives. Autrement la courbe serait convexe vers l'axe. »

Décidément Leibniz corrigeait bien mal ses épreuves.

« Mais là où l'accroissement est maximum ou minimum, c'est-à-dire là où les accroissements, de croissants qu'ils étaient, deviennent décroissants, ou l'inverse, là se trouve un point de flexion contraire, où la concavité et la convexité se permutent.

pourvu qu'en ce point les ordonnées, de croissantes ou décroissantes qu'elles étaient, ne deviennent pas décroissantes ou croissantes. »

C'est-à-dire, je pense, pourvu que le point considéré ne se trouve pas justement sur l'axe.

« Car alors la concavité ou la convexité resterait tournée vers l'axe. »

Ce qui fait que Leibniz s'embrouille un peu dans ses règles, bien qu'il y verrait très clair sur des exemples, c'est d'abord qu'il ne donne pas des signes contraires aux ordonnées de deux arcs placés de côtés opposés par rapport à l'axe (des x); en second lieu, que, d'après sa manière de voir, si un arc de courbe se déplaçait parallèlement à notre axe des y, de manière à passer d'un côté à l'autre de l'axe (des x), sa concavité changerait de sens, parce qu'il la prend par rapport à cet axe; enfin que, dans les points de même abscisse, pris sur les deux arcs comparés, les ordonnées (comptées toutes positivement) auraient leurs différentielles de signes contraires.

La règle des signes de position, loin d'être bien comprise, n'avait même pas encore été nettement formulée. L'aphorisme d'Albert Girard, *le moins recule où le plus avance*, n'avait pas encore fait fortune, comme cela se voit dans Huyghens surtout, et même quelquefois dans Newton.

C'est pourquoi nous passons une discussion de signes peu heureuse; mais nous retenons cette phrase : « De là vient que le problème du point d'inflexion n'a pas deux racines égales, comme celui du point maximum, mais trois. »

« *Puissances :*

$$dX^a = aX^{a-1}dX.$$

Exemple :

$$dX^3 = 3X^2 dX.$$

De même

$$d\frac{1}{X^a} = -a\frac{dX}{X^{a+1}}.$$

Exemple : si

$$W = \frac{1}{X^3},$$

$$dW = -3\frac{dX}{X^4}.$$

« *Racines :*

$$d\sqrt[b]{X^a} = \frac{a}{b}dX\sqrt[b]{X^{a-b}},$$

d'où

$$d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

« Au reste la règle relative aux puissances entières aurait suffi pour les fractions et les radicaux, car une puissance devient une fraction lorsque l'exposant est négatif, et se change en un radical lorsque l'exposant devient fractionnaire. Mais j'ai mieux aimé déduire moi-même ces conséquences, que de les laisser à trouver aux autres; parce qu'il importe, en une chose embarrassante par elle-même, de se prêter à la faciliter. »

Cette parfaite honnêteté, que Leibniz porte partout, rend la lecture de ses œuvres particulièrement attrayante. Simple et grand, naïf et enthousiaste, on pourrait le peindre en deux mots : *humainement divin.*

« Connaissant l'*algorithme* de ce calcul, que j'appelle *différentiel*, toutes les équations différentielles peuvent être trouvées par les mêmes opérations, par suite les maximums et les mini-

mums, ainsi que les tangentes; sans qu'il soit utile de faire disparaître les fractions (dénominateurs), les radicaux, ou les autres liens (*vincula*), ce qui était indispensable d'après les méthodes publiées jusqu'ici.

« La démonstration de toutes ces choses sera facile à une personne versée dans les Mathématiques, si elle considère seulement ceci : que les accroissements dx, dy, dv, dw, dz *peuvent être regardés comme proportionnels.* »

Ce dernier membre de phrase est très remarquable.

« Ainsi une équation quelconque étant donnée, on pourra en écrire l'équation différentielle, en substituant simplement à chaque membre, et, pour cela, à chaque terme, sa différentielle obtenue d'après l'algorithme précédent.

« Les méthodes proposées précédemment ne reposaient pas sur un pareil moyen, car elles emploient une droite qui n'est pas dy, c'est-à-dire la quatrième proportionnelle à la sous-tangente, à l'ordonnée et à dx, ce qui trouble tout. (Il est impossible de traduire littéralement ce passage, car il contient trop de fautes d'impression).

« Aussi prescrivaient-elles d'enlever d'abord les fractions et les irrationnelles, tandis qu'il est clair que notre méthode convient même aux lignes transcendantes, c'est-à-dire qui ne sauraient être ramenées au calcul algébrique, ou qui ne sont d'aucun degré; et cela par un moyen universel, sans hypothèses particulières, qui ne se présentent pas toujours, simplement parce que la recherche des tangentes se réduit à celle de droites qui joignent deux points infiniment voisins de la courbe, ou se confondent avec l'un des côtés d'un polygone d'un nombre infini de côtés, qui, pour nous, équivaut à la courbe.

« Au reste, la distance infiniment petite de ces points peut toujours être exprimée par une différentielle connue, ou au moyen d'une relation qui la contienne, par l'intermédiaire d'une tangente connue.

« En particulier, si y était une quantité transcendante, par exemple l'ordonnée d'une cycloïde, que y entrât dans un calcul qui dût fournir l'ordonnée z d'une autre courbe, et qu'on voulût avoir dz, pour trouver la tangente à la seconde courbe, dz dépendrait de dy, et dy serait connu puisqu'on connaît la tangente à la cycloïde.

« Et cette même tangente à la cycloïde, si on ne la connaissait pas, serait de même déterminée par le calcul, au moyen des propriétés de la tangente au cercle.

« Mais il convient de donner un exemple :

« Soit l'équation *primitive*, ou donnée :

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} = 0,$$

exprimant la relation entre x et y, ou entre AX et XY (l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe), a, b, c, e, f, g, h, l, m étant des quantités données; il s'agit de mener par un point Y, donné sur la courbe, une droite YD (*fig.* 18) qui la touche en ce point, ou de trouver la raison de DX à XY. Posons pour abréger

$$a + bx = n,$$
$$c - x^2 = p,$$
$$ex + fx^2 = q,$$
$$g^2 + y^2 = r,$$
$$h^2 + lx + mx^2 = s;$$

il viendra

$$\frac{x}{y} + \frac{np}{q^2} + axr + \frac{y^2}{\sqrt{s}} = 0,$$

ce qui sera l'équation *seconde*.

« Mais, par notre calcul,

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pm x\,dy \mp y\,dx}{y^2},$$

$$d\left(\frac{np}{q^2}\right) = \frac{\pm np.2q\,dq \mp q^2(p\,dn + n\,dp)}{q^4},$$

$$d(ax\sqrt{r}) = adx\sqrt{r} + \frac{ax\,dr}{2\sqrt{r}},$$

et

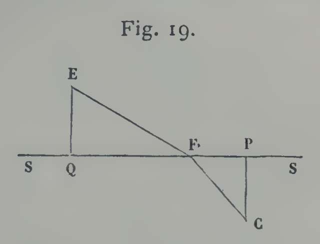
$$d\left(\frac{y^2}{\sqrt{s}}\right) = \frac{\pm y^2 \frac{ds}{2\sqrt{s}} \mp 2y\,dy\sqrt{s}}{s}.$$

En substituant, on aura la *troisième* équation; enfin en remplaçant dn, dp, dq, dr et ds par leurs valeurs, on aura la *quatrième* équation, *où les seules différentielles qui resteront, savoir dx et dy, seront toujours en dehors des dénominateurs* (extra nominatores) *et des autres liens* (vincula), *et chaque membre* (terme) *sera affecté* (multiplié) *soit par dx, soit par dy, la loi des homogènes subsistant pour ces deux quantités; et cela quelque compliqué que soit l'exemple, de sorte qu'on pourra toujours obtenir le rapport de dx à dy, ou, ce qui est la même chose, celui de* DX *à* XY. *Or l'exemple que nous avons choisi est assez compliqué pour que la manière de se servir des règles établies plus haut apparaisse même dans un cas encore plus difficile.*

« Maintenant il importe de montrer l'usage (de la méthode)

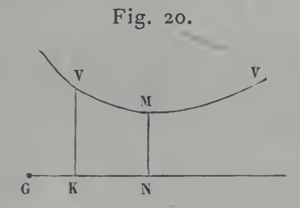
sur des exemples plus difficiles à entendre (*in exemplis intellectui magis obviis*). Soient donnés deux points C et E (*fig.* 19) et une droite SS, dans un même plan, on demande de trouver sur SS un

Fig. 19.



point F tel que la somme des produits de EF et de CF par des droites données h et r soit minimum. (Leibniz explique le rapport qu'a la question à la théorie de la lumière, mais nous passons ces détails connus.) Représentons la somme de ces rectangles $h.\mathrm{EF}$ et

Fig. 20.



$r.\mathrm{CF}$ par l'ordonnée KV, que nous désignerons par ω, d'une courbe VV, rapportée à un axe GK (*fig.* 20); il s'agit de trouver le minimum NM de cette ordonnée. Soient $\mathrm{CP} = c$, $\mathrm{EQ} = e$, $\mathrm{PQ} = p$, $\mathrm{QF} = \mathrm{GN} = x$, $\mathrm{CF} = f$ et $\mathrm{EF} = g$, FP sera égal à $p - x$; quant à f et à g, ils seront représentés par

$$\sqrt{e^2 + (p-x)^2} = \sqrt{l} \quad \text{et} \quad \sqrt{e^2 + x^2} = \sqrt{m}.$$

Nous aurons donc

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m},$$

dont l'équation différentielle sera, en faisant $d\omega = 0$, pour le cas du minimum,

$$0 = h\frac{dl}{2\sqrt{l}} + r\frac{dm}{2\sqrt{m}},$$

ou, en remplaçant dl et dm par leurs valeurs,

$$0 = -h\frac{(p-x)\,dx}{\sqrt{l}} + r\frac{x\,dx}{\sqrt{m}},$$

ou

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g};$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{r} = \frac{fx}{g(p-x)} = \frac{\text{QF}}{\text{EF}} : \frac{\text{PF}}{\text{FC}}.$$

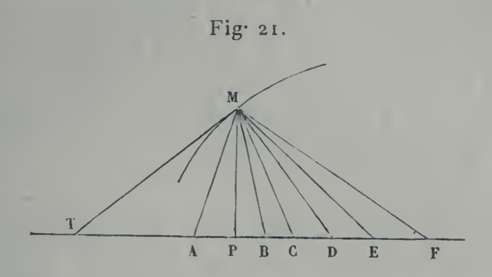
« Ainsi, ce qui a paru difficile à des hommes très savants sera enlevé en trois lignes par un homme instruit dans notre calcul.

« Je prendrai encore un autre exemple : imaginons la courbe lieu des points M (*fig.* 21) tels que la somme de leurs distances MA, MB, MC, MD, ME, MF à six points A, B, C, D, E, F donnés sur un axe, soit égale à une quantité donnée g : on demande la tangente en M à cette courbe. Soient MP l'ordonnée du point M et T le pied de la tangente cherchée sur l'axe, on aura

$$\frac{\text{TP}}{\text{MP}} = \frac{\frac{\text{MP}}{\text{MA}} + \frac{\text{MP}}{\text{MB}} + \frac{\text{MP}}{\text{MC}} + \frac{\text{MP}}{\text{MD}} + \frac{\text{MP}}{\text{ME}} + \frac{\text{MP}}{\text{MF}}}{-\frac{\text{PA}}{\text{MA}} + \frac{\text{PB}}{\text{MB}} + \frac{\text{PC}}{\text{MC}} + \frac{\text{PD}}{\text{MD}} + \frac{\text{PE}}{\text{ME}} + \frac{\text{PF}}{\text{MF}}},$$

et la règle restera la même, quel que soit le nombre des points donnés sur l'axe.

Fig. 21.



« Ce problème, si l'on voulait le traiter par les anciennes méthodes, serait inabordable.

« Je joindrai encore ici la solution du problème proposé par de Beaune à Descartes, que celui-ci essaya, mais ne put résoudre : trouver la courbe dont la sous-tangente serait une constante a. Si w est l'ordonnée de cette courbe,

$$\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx};$$

si donc, puisque dx peut être pris arbitrairement, on le suppose constant et égal à b, il viendra

$$w = \frac{a}{b} dw;$$

les ordonnées de la courbe cherchée sont donc proportionnelles à leurs incréments ou à leurs différentielles, ou bien : si les abscisses croissent en progression arithmétique, les ordonnées croissent en progression géométrique; ou encore si les ordonnées sont les nombres, les abscisses en seront les logarithmes. La courbe est donc une logarithmique. »

Meditatio nova de naturâ anguli contactus et osculi, horumque usu in practicâ mathesi, ad figuras faciliores sucedaneas difficilioribus substituendas. C'est-à-dire : *Méditation nouvelle sur la nature des angles de contact et d'osculation, et sur l'usage de ces considérations en vue de substituer à des courbes plus compliquées d'autres courbes plus simples qui puissent les suppléer.* (Acta Eruditorum, 1686.)

Et

Generalia de natura linearum, anguloque contactus, et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis. C'est-à-dire : *Généralités sur la nature des courbes, les angles de contact et d'osculation; les générations par roulement et autres modes, et sur les usages de ces choses.* (Acta Eruditorum, 1692.)

Le premier de ces articles contient la théorie complète des osculations de tous les ordres, théorie dont Leibniz montre l'utilité pratique pour substituer à une courbe compliquée une courbe plus simple, qui lui soit osculatrice au degré voulu, d'après la nature de la question proposée, et produise les mêmes résultats.

Malheureusement on y trouve les lapsus les plus graves.

Le second est une réponse à des objections présentées par Jacques Bernoulli, relativement au premier.

Voici la traduction abrégée de la Méditation :

« On peut, dans une partie infiniment petite d'une ligne, considérer non seulement la direction, comme cela a été fait jusqu'ici, mais le changement de direction, ou la courbure (*flexuram*), et de même que les géomètres, pour assigner la direction d'une ligne en un point, se sont servis de la plus simple des lignes

ayant la même direction en ce point, c'est-à-dire de la ligne droite qui y était tangente ; de même, je mesurerai la courbure de la ligne au même point, à l'aide de la ligne la plus simple ayant en ce point non seulement la même tangente mais aussi la même courbure que la ligne proposée, c'est-à-dire son cercle osculateur, comme je vais bientôt l'expliquer. Car de même que la droite est la ligne la plus propre à déterminer une direction, par cela qu'elle a partout la même direction ; de même le cercle sera la ligne la plus apte à déterminer une courbure parce qu'il a partout la même courbure.

« J'appelle cercle osculateur à une courbe en un de ses points celui qui fait avec elle un angle de contact plus petit que tous les autres cercles qui touchent la courbe au même point, du côté où elle est concave ; il y en a un, en effet, qui peut lui être assimilé plus que tous les autres, qui la suit le plus loin, et l'approche tellement qu'aucun autre cercle ne pourrait passer entre lui et elle. J'appelle angle d'osculation (*angulum osculi*) cet angle minimum de contact ; de même que l'angle minimum d'une droite avec une courbe s'appelle angle de contact.

« Quant à la manière d'obtenir ce cercle osculateur, il suffira de savoir que, de même que les lignes tangentes sont fournies par des équations ayant deux solutions égales, de sorte que ces courbes ont deux points d'intersection confondus, et que les points d'inflexion sont ceux où la tangente rencontre la courbe en trois points confondus ; de même les cercles ou autres courbes quelconques osculatrices à une courbe donnée se trouveront par la condition que les équations aient quatre solutions égales, ou deux contacts réunis en un seul. »

Outre l'erreur qu'elle contient, cette phrase était presque

inintelligible; c'est pourquoi je la reproduirai textuellement :

« *Ut autem habeatur et modus inveniendi circulum osculantem, sciendum est, quemadmodum tangentes inveniuntur per æquationes, quæ habent duas radices æquales, seu duos occursus coincidentes, et flexus contrarii per tres radices æquales; ita circuli vel aliæ quævis lineæ datam osculantes inveniuntur per quatuor radices æquales, seu per duos contactus in unum coincidentes.* »

Il est évident que Leibniz trouve le nombre *quatre* dans son imagination; il compte par points de contact d'abord séparés et ensuite confondus, au lieu de compter par points d'intersection venant à se réunir. Mais ce lapsus, considéré avec indulgence, n'enlève rien au mérite de la théorie.

Je vais plus loin : les erreurs analogues, qu'on rencontre à chaque instant dans les Ouvrages de Leibniz, prouvent sa bonne foi, la candeur avec laquelle il dit ce qu'il croit, au moment où il le croit, sans défiance de la critique, sans craindre les fâcheuses interprétations. Il se trompe, mais ne cherche jamais à tromper. Son terrible adversaire Newton ne se serait pas découvert avec cette simplicité. Aussi a-t-il pu faire payer bien cher à Leibniz ses négligences. Mais la Mathématique n'étant que le premier échelon du savoir et la Morale le dernier, il vaut encore mieux se tromper de dix points en Mathématiques que d'un en Morale.

Cependant, comme Leibniz va encore se méprendre, je veux essayer de prévenir les juges en sa faveur. Il est évident qu'il n'a pas fait les calculs qu'il aurait dû faire pour vérifier son assertion; mais ce qui va suivre rendra aussi évident qu'il en avait au moins fait un, relatif à un cas particulier choisi, il est vrai, assez mal pour l'induire forcément en erreur.

Le calcul du rayon de courbure d'une des courbes usuelles, en un quelconque de ses points, l'ennuyant sans doute, il aura supposé la courbe rapportée à son axe, pris pour axe des x, et il aura cherché le rayon de courbure de cette courbe en son sommet, en prenant l'ordonnée pour variable indépendante. Or cette ordonnée n'entrant que par son carré aussi bien dans l'équation de la courbe que dans celle du cercle, Leibniz ne pouvait naturellement trouver que deux ou quatre racines égales dans l'équation aux ordonnées de rencontre : deux pour le cas de tangence et quatre pour le cas d'osculation.

C'est pourquoi il ajoute : « *Quod si tres contactus coincidant, aut quatuor, aut plures (radicibus sex, aut octo, aut pluribus existentibus æqualibus) oriuntur osculationes secundi, tertiive gradûs, aut adhuc altiores, in tantum perfectiores osculo primi gradûs, in quantum prima osculatio perfectiorem contactum continet, quam contactus communis.* » C'est-à-dire : Si trois contacts coïncident, ou quatre, ou davantage (les équations des deux courbes ayant six ou huit ou un plus grand nombre de solutions égales), il en résulte des osculations du second degré, ou du troisième, ou d'un ordre plus élevé, lesquelles l'emportent d'autant chacune en perfection (sur la précédente) que l'osculation du premier degré l'emporte sur le contact simple.

« En conséquence un cercle peut toucher une droite mais non lui être osculateur, et, si un cercle est osculateur à un autre, ils ne seront pas différents.

« Au reste un cercle pourra être osculateur à une courbe quelconque. Quant à savoir à quel degré pourra s'élever l'osculation de deux courbes, il faudra voir en combien de points elles peuvent se couper. »

Encore une inexactitude.

« Ces considérations ont une grande utilité dans la pratique... car, si une ligne jouit d'une propriété remarquable, mais qu'il soit difficile de l'obtenir au tour ou autrement, on pourra substituer à l'un de ses arcs (dans un intervalle sinon grand, du moins suffisant pour la pratique) un arc, presque coïncident, d'une autre courbe plus facile à décrire, soit tangente, soit osculatrice à la première, et principalement, s'il y a lieu, une circonférence de cercle, qui est la ligne la plus facile à décrire.

« C'est ce qui explique pourquoi le cercle, en catoptrique aussi bien qu'en dioptrique, est le succédané de la parabole, de l'hyperbole ou de l'ellipse, et a en quelque sorte ses foyers, à leur imitation. Car un cercle dont le diamètre est égal au paramètre d'une section conique, dont le centre est sur l'axe, dans l'intérieur de la courbe, et qui passe par le sommet, est osculateur à la conique en ce sommet; c'est pourquoi un arc assez petit de ce cercle ne diffère pas de l'arc de la courbe.

« On voit par là pourquoi le foyer d'un miroir concave est au quart du diamètre, cela tient à ce que le foyer de la parabole est distant du sommet du quart du paramètre et que les foyers de la parabole et de son cercle osculateur coïncident. »

Il est évident que c'est la considération de cet exemple qui a induit Leibniz en erreur au sujet du nombre des points communs à une courbe et à son cercle osculateur, rassemblés au point de contact.

Les équations de la parabole et du cercle qui lui est osculateur en son sommet sont

$$y^2 = 2px$$

et

$$y^2 + (x - p)^2 = p^2.$$

Si l'on élimine x entre les deux, ce qu'a dû faire Leibniz, parce que c'est plus facile, il vient

$$y^2 + \left(\frac{y^2}{2p} - p\right)^2 = p^2,$$

ou

$$\frac{y^4}{4p^2} = 0.$$

Et le problème, comme il le dit, a bien quatre racines égales.

Mais ce qui a principalement exposé Leibniz à se tromper, est que sa définition du cercle osculateur était mal choisie. De même qu'il appelait tangente à une courbe en un de ses points la droite qui fait le plus petit angle possible avec cette courbe, de même il entendait par cercle osculateur celui qui fait aussi le plus petit angle possible avec la courbe. Je ne dis pas que l'idée soit fausse, elle est seulement intraduisible, parce qu'elle est trop audacieuse. Mais Leibniz avait trop osé en métaphysique, pour être bien timoré en mathématique.

Les erreurs que nous avons relevées dans l'article précédent furent signalées par Jacques Bernoulli dans le numéro de mars 1692 des *Acta Eruditorum;* mais Leibniz, sans doute, ne comprit pas les objections que lui faisait son disciple et il maintint son opinion dans la réponse à Jacques, dont nous avons reproduit le titre plus haut.

Voici comment il raisonne : les normales à une courbe en deux points voisins A et B se coupent en C et si du point C on décrit

deux cercles avec CA et CB pour rayons, ces deux cercles auront chacun avee la courbe deux points communs, réunis les uns en A et les autres en B. Si donc le point B vient se confondre avec le point A, le cercle décrit de la position limite du point C comme centre, avec sa distance au point A comme rayon, touchera la courbe en quatre points confondus.

Leibniz admet encore moins l'idée de Bernoulli que le cercle osculateur traverse la courbe au point où il la touche; il dit que ce cercle ne coupera pas la courbe, mais la touchera, à moins que le point de contact ne soit un point d'inflexion (*flexus contrarii*).

Il ajoute : « Régulièrement le nombre des points communs à un cercle et à une autre courbe est pair. C'est pourquoi je ne vois pas comment l'osculation du premier ordre pourrait être constituée par trois intersections; ou, du moins je ne vois pas qu'un tel contact soit régulier, c'est-à-dire puisse se présenter en tous les points d'une courbe, ni que la réunion de quatre points d'intersection constitue un contact singulier, qui ne pourrait avoir lieu qu'en quelques points déterminés d'une courbe, etc. »

La fin de l'article a trait à d'autres questions.

De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac de novo in ea re Analysis infinitorum usu. C'est-à-dire : *De la ligne formée des rencontres successives d'une infinité de lignes menées régulièrement et les touchant toutes, ainsi que d'un nouvel usage, dans cette recherche, de l'Analyse des infinis.* (Acta Eruditorum, 1692.)

Il s'agit comme on voit de l'enveloppe d'une courbe mobile. « Telle est, dit Leibniz, la courbe qui en engendre une autre par évolution et dont l'invention est due à Huyghens; telles sont aussi les courbes imaginées par Tschirnhausen, et qui sont comme des foyers linéaires.

« J'appelle ici ordonnées, des courbes quelconques définies pourtant de telle manière, que chacune d'elles est déterminée lorsqu'on en connaît un point. Deux quelconques d'entre elles, infiniment peu distantes, se coupent en un point qu'on peut assigner, et la suite de ces points forme une ligne qui a cela de remarquable qu'elle est tangente à toutes les courbes ordonnées, comme on le reconnaîtra aisément, mais ce n'est pas le lieu de le démontrer.

« Lorsqu'on recherche la tangente à une courbe, il faut différentier son équation, et alors les paramètres sont supposés invariables (*unicæ*) ou *indifférentiables*, tandis que l'abscisse aussi bien que l'ordonnée est variable (*gemina*) ou *différentiable.*

« Au contraire, dans la question présente où l'on ne recherche pas la tangente à l'une des courbes, en un de ses points, mais la courbe qui est leur tangente commune, ce seront les coordonnées x et y qui seront indifférentiables, tandis que le paramètre dont dépendra chaque courbe sera différentiable, parce que c'est en variant qu'il fait varier la courbe.

« Tout cela serait expliqué plus clairement et justifié sur des exemples s'il s'agissait d'une exposition de notre *Analyse des infinis;* mais ce n'en est point ici le lieu et je n'en ai pas le temps.

« Ceux qui ont compris mes premiers articles parviendront aisément à comprendre ce que je viens de dire, s'ils veulent y

réfléchir; et ils y auront d'autant plus de plaisir qu'ils pourront s'en croire en partie inventeurs. »

Nova calculi differentialis applicatio et usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione. C'est-à-dire : *Nouvelle application du calcul différentiel à la construction des courbes, d'après une propriété de leurs tangentes.* (Acta Eruditorum, 1694.)

Cet article fait suite au précédent : Leibniz y revient, pour la compléter, sur la théorie qu'il a déjà exposée, et il en donne des applications.

« J'enseignerai, dit-il, à réduire sous les lois de la Géométrie commune le problème suivant : Étant données des lignes dont la position varie suivant une certaine loi, trouver celle à laquelle elles sont toutes tangentes; ou bien trouver la ligne qui touche une infinité de lignes données, dont la position varie suivant une loi régulière.

« Descartes soumit au calcul les lieux des anciens en proposant des équations qui convinssent à tous leurs points; mais les nôtres seront infiniment plus amples car elles embrasseront tous les points de toutes les courbes contenues dans une même série ordonnée. Elles contiendront les coordonnées x et y d'un point quelconque de l'une des courbes de la série, mais ces coordonnées seront principalement celles de la courbe qu'elles formeront par leurs rencontres successives; elles contiendront aussi des coefficients a, b, c, ..., constants pour chaque courbe, les uns inhérents à elle, comme des paramètres, et les autres extérieurs qui serviront à définir la position de la courbe.

« Si l'on compare entre elles les courbes d'une même série, ou si l'on considère le passage d'une des courbes à l'autre (*transitum de curva in curvam*), quelques coefficients seront absolument constants (*constantissimæ*) ou permanents, ce seront ceux qui resteront les mêmes dans toutes les courbes de la série, et d'autres seront variables. Mais comme, pour que la série soit définie (*ut seriei curvarum lex data sit*), il est nécessaire que la variabilité ne subsiste que dans un seul cofficient; ils devront, s'il y en a plusieurs, être liés par des conditions accessoires, au moyen desquelles on pourrait les enlever tous, excepté un, de l'équation représentant toutes les courbes de la série.

« Au reste il est manifeste que deux courbes voisines se coupent en un point unique, et qu'on pourrait assigner, de la courbe cherchée, de sorte que les coordonnées de ce point soient fixes; il en résulte que, si l'on considérait x et y comme représentant les coordonnées d'un point d'une courbe de la série, elles seraient variables, mais que, si les mêmes quantités représentent les coordonnées du point où la courbe en question touche la courbe cherchée, elles deviendront invariables. C'est pourquoi, dans le passage d'une courbe de la série à sa voisine, ces coordonnées x et y seront indifférentiables, tandis que les coefficients, puisqu'ils changent d'une courbe à sa voisine, dans la série, seront différentiables.

« Cela posé, le calcul sera institué de la manière suivante : que l'on prenne un angle droit fixe, dont les côtés indéfiniment prolongés constitueront deux axes de relation pour les courbes, ou bien un axe et son conjugué [1]; on aura une équation (1)

[1] C'est la première fois, je crois, qu'on voit apparaître deux axes de coordonnées. Ce dernier mot du reste a été créé par Leibniz.

entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de l'une quelconque des courbes considérées. Si cette équation contient plusieurs coefficients arbitraires, b, c, ..., on aura des équations (2) au moyen desquelles on pourra enlever ces coefficients de l'équation (1), sauf l'un d'eux, b par exemple, ce qui donnera une équation (3). En différentiant cette dernière, comme l'équation produite ne contiendra d'autre différentielle que celle de b, cette différentielle s'évanouira et il restera une équation ordinaire (4) au moyen de laquelle on enlèvera b de l'équation (3) et l'on aura une équation (5) où il ne restera que x et y et les paramètres invariables, tels que a; ce sera l'équation de la courbe cherchée, tangente à toutes les courbes de la série et formée de leurs intersections successives.

« Mais le calcul peut être institué d'une autre manière en différentiant en même temps l'équation (1) et les équations (2) par rapport aux coefficients variables; on introduira ainsi plusieurs différentielles, mais on aura les équations nécessaires pour les faire disparaître toutes excepté une, qui s'évanouira d'elle-même. Ensuite on fera disparaître les coefficients variables.

« On peut résoudre ainsi d'innombrables problèmes de Géométrie sublime concernant la question inverse des tangentes et qu'on ne pouvait pas aborder jusqu'ici. J'en indiquerai quelques-uns :

« Par exemple, si l'on donne une relation entre les segments interceptés sur les axes, à partir de l'origine, par une tangente quelconque à une courbe, on peut trouver cette courbe; car elle touche constamment une droite dont l'équation ne contient qu'un coefficient arbitraire.

« De même si l'on donne une relation entre les segments inter-

ceptés sur les axes par une normale à une courbe, on peut trouver cette courbe. Car la normale enveloppe une courbe dont celle que l'on cherche est la développante.

« Il est remarquable que dans ce cas la courbe cherchée n'est pas unique; il en existe en effet une infinité qui satisfont à la question et elles sont parallèles entre elles, mais alors on peut se donner un point par lequel la courbe cherchée doive passer. »

Il est curieux d'observer que, même dans un article aussi beau, tant pour la forme que pour le fond, et où Leibniz possède pourtant si bien son sujet, il ne peut éviter une singulière inadvertance : il propose aussi de trouver l'enveloppe d'une droite passant par un point fixe, d'une part, et successivement par tous les points d'une courbe donnée!

Mais il n'y a que les gens qui ne font rien qui ne se trompent pas. D'ailleurs, si Leibniz s'était mis à s'éplucher, il aurait perdu toute sa bonhomie.

« Mais nous donnerons un exemple du calcul, relativement à un problème assez général : *Étant donnée la relation entre la normale à une courbe, terminée à l'axe* (*des* x), *et la distance de l'origine à l'extrémité de cette normale, sur l'axe, trouver la courbe.* Les courbes enveloppées seront des cercles décrits des pieds des normales sur l'axe et ayant pour rayons les longueurs de ces normales. Soient c une normale, b la distance de l'origine au pied de cette normale sur l'axe, et $ab = c^2$ la relation donnée entre c et b; l'équation du cercle variable sera

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + c^2,$$

ou, en remplaçant c^2 par ab,

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + ab;$$

en différentiant cette équation par rapport à b et enlevant db facteur commun, il vient

$$b = x + a,$$

de sorte que l'équation de la courbe cherchée est

$$x^2 + y^2 + (x + a)^2 = 2(x + a)x + ab.$$

« Si l'on donnait la relation entre la longueur de la tangente, terminée à l'axe, et le segment qu'elle intercepte sur l'axe, et qu'on demandât la courbe, ce qui reviendrait à chercher la courbe normale à une série de cercles, on pourrait employer la méthode que nous avons expliquée pour cela dans ces *Acta*. Mais celle que nous venons d'exposer présentera les plus grands avantages dans une foule de problèmes de Géométrie supérieure, de Mécanique ou de Physique appliquée. »

Il est certain que c'est une méthode d'intégration pour les équations différentielles du premier ordre et les méthodes de ce genre ont souvent l'avantage sur celles qui reposent exclusivement sur des transformations difficiles à découvrir. Au reste il faut bien remarquer que la plupart des équations différentielles qu'on a pu traiter ont d'abord été intégrées à l'aide de considérations géométriques et ce n'a été, le plus souvent, qu'après leur intégration, qu'on a aperçu les transformations utiles pour y arriver par des considérations abstraites. Or il sera sans doute permis d'ajouter à ce propos qu'en dirigeant trop exclusivement les jeunes gens vers la recherche de ces transformations on atrophie peut-être en eux les facultés d'invention.

Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse or-

dinaire et le nouveau calcul des transcendantes. (*Journal des Savants* pour 1694).

« La solution qu'a donnée M. le marquis de l'Hospital, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, d'un problème proposé par M. Jean Bernoulli, et tout ce qu'on a eu la bonté d'y dire en faveur de mon calcul m'engage à en dire un mot, pour amener les géomètres à le perfectionner... MM. Bernoulli ont été des premiers qui ont témoigné publiquement, avec un très grand succès, combien ils l'avaient trouvé propre pour résoudre des problèmes physicomathématiques, dont la porte paraissait fermée auparavant. M. le marquis de l'Hospital y a pris goût aussi, en ayant donné de beaux échantillons; et enfin M. Huyghens lui-même en a reconnu et approuvé la conséquence. Il faut rendre cette justice à M. Newton (à qui la Géométrie, l'Optique et l'Astronomie ont de grandes obligations) qu'encore en ceci il a eu quelque chose de semblable de son chef, suivant ce qu'on en a su depuis. Il est vrai qu'il se sert d'autres caractères; mais comme la caractéristique même est, pour ainsi dire, une grande part de l'art d'inventer, je crois que les nôtres donnent plus d'ouverture.

« Pour ce qui est de ceux qui ne se servent que de l'analyse ordinaire et pensent peut-être qu'elle leur suffit, il sera bon de leur proposer des problèmes semblables au dernier de M. Bernoulli.

« En voici un plus général, qui le comprend avec une infinité d'autres : Étant donnée la raison, comme m à n, de deux *fonctions* d'une courbe, trouver cette courbe. J'appelle fonction toute partie d'une droite partant d'un point de la courbe, et terminée ailleurs.

Telles sont l'abscisse et l'ordonnée du point; les portions de la tangente ou de la normale terminée à l'un des axes, la sous-tangente ou la sous-normale, etc.

« Le problème se peut toujours résoudre; et il y a moyen de construire la courbe, au moins par les quadratures ou les rectifications, etc. »

Tentamen de motuum cœlestium causis, ou *Essai sur le mouvement des planètes* (Acta Eruditorum, 1689.)

Peut-être Newton a-t-il été blessé de voir Leibniz traiter de nouveau une question qu'il avait lui-même si complètement élucidée. En général, il est peu convenable d'aller fourrager dans un champ défriché par un émule encore vivant. Toutefois, Newton, en admettant qu'il le pût, n'avait pas jugé à propos d'appliquer le calcul infinitésimal à la solution de la question des mouvements des astres qui composent notre système planétaire et Leibniz avait assurément le droit de choisir cet exemple pour mettre en lumière la puissance de sa méthode différentielle.

Mais il s'en faut beaucoup que toutes les parties de ce *tentamen* soient excellentes. Leibniz en effet débute par des principes absolument dépourvus de bases et qui, au reste, semblent n'avoir d'autre but que de battre en brèche, celui de la gravitation universelle. Il abandonne, il est vrai, bientôt après, le champ des hypothèses, pour aborder plus sérieusement le problème de la recherche de la force qui retient les planètes dans leurs orbites. Mais alors il se trompe plusieurs fois d'une manière grave, dans des passages, il est vrai, tout à fait superflus.

Nous passons un discours préliminaire, heureusement assez

court, où il est question de Pythagore, d'Aristote, de Ptolémée, de Copernic, de Tycho et de ses travaux herculéens, de Képler, de Descartes, et de Cassini; des hypothèses anciennes sur les *Intelligences* directrices des astres, sur les *Sphères solides*, les *Sympathies* et *Influences magnétiques,* etc.

Leibniz se prononce en faveur de l'opinion que les mouvements des astres sont produits par celui de l'éther, ou pour parler *astronomiquement* (ce qui signifie peut-être obscurément) par des *orbes déférents*, *mais fluides.* (*Ut astronomicè loquar*, *ab orbibus deferentibus quidem*, *sed fluidis.*)

1. *Tous les corps qui décrivent des lignes courbes dans un fluide sont actionnés par le mouvement de ce fluide.*

Évidemment; mais Leibniz semble croire qu'aucune autre action ne puisse s'exercer sur ces corps.

2. De là résulte que *les planètes sont mises en mouvement par leur éther* (*planetas moveri a suo ethere*).

3. Leibniz, dans tout son article, rapporte les mouvements considérés à des coordonnées polaires et décompose chacun d'eux, comme nous le ferions, en un mouvement de circulation et un mouvement suivant le rayon, qu'il appelle *paracentrique;* il dit que le mouvement de circulation est *harmonique* lorsque la vitesse de ce mouvement varie en raison inverse du rayon vecteur du mobile.

L'idée de cette décomposition lui appartient en propre; elle est d'autant plus remarquable que le choix des coordonnées (Newton n'en employait d'aucun genre) est parfaitement approprié à la nature de la question. Malheureusement Leibniz se trompe un peu dans l'application, suivant son habitude.

4. *Si le mouvement de circulation d'un mobile autour d'un point est harmonique, l'aire décrite par le rayon vecteur de ce mobile sera proportionnelle au temps et réciproquement, quel que soit le mouvement paracentrique.*

Newton démontre le théorème des aires en supposant la force dirigée vers un point fixe, c'est-à-dire qu'il entre de suite dans la question de Dynamique. Leibniz, comme on voit, suppose la loi des aires et trouvera que la force est dirigée vers le centre de ces aires.

5. Ce paragraphe se réduit à une explication concernant les différents ordres d'infiniment petits : par exemple, si un arc est infiniment petit (*infinitè parvus*), la différence entre cet arc et sa corde sera infiniment infiniment petite (*infinities infinitè parva*).

6. Le mouvement de circulation des planètes autour du Soleil est harmonique, ainsi que celui des satellites d'une planète autour d'elle; c'est-à-dire que la vitesse de circulation de chacun de ces corps varie en raison inverse de sa distance au centre, puisque, d'après l'observation, l'aire décrite par chaque rayon vecteur croît proportionnellement au temps.

7. *On doit convenir aussi que l'éther ou l'orbe fluide de chaque planète est emporté d'un mouvement harmonique.* Car il a été démontré plus haut.... que le décret promulgué par Descartes touchant les tourbillons n'était pas encore abrogé.

8. C'est pourquoi nous admettrons que les planètes sont animées de deux mouvements, c'est-à-dire du mouvement composé d'une circulation harmonique et d'un transport paracentrique, la première due au mouvement de leurs orbes fluides (*orbis sui fluidi deferentis*) et le second à une sorte de gravité, attraction, ou impulsion vers le Soleil.

Leibniz donne ici une curieuse explication de l'action exercée par les orbes fluides : la circulation de l'éther fait que la planète se meut harmoniquement, sans qu'elle ait ce mouvement en propre, mais parce qu'elle se déplace par une natation tranquille (en suivant simplement le cours du fluide), de sorte que, si elle s'élève (c'est-à-dire, si elle s'éloigne du centre), sa vitesse diminue (pourquoi ?), et que, si elle s'abaisse, elle s'accommode à la vitesse plus grande des couches inférieures, et cela se fait d'autant plus facilement..... que tout se passe dans l'imagination.

9. La circulation harmonique étant ainsi (clairement) expliquée, passons au mouvement paracentrique : le Soleil peut être conçu comme un grand aimant, et les actions magnétiques dérivent, sans doute possible (*haud dubiè*), des impulsions des fluides.

10. Comme tout mobile s'efforce de s'écarter de la ligne courbe qu'il décrit, par la tangente, il sera permis d'appeler *excussif* (*excussorium*) cet effort auquel est égale la force qui empêche le mobile de s'échapper : nous pourrons mesurer cet effort en un point par la perpendiculaire abaissée du point suivant sur la tangente au premier; les deux points n'étant séparés que par une distance inassignable.

En réalité, l'accélération centrifuge est le double du quotient de cette perpendiculaire par le carré du temps employé par le mobile à passer d'un des points à l'autre; quant à ce temps, Leibniz le suppose pris une fois pour toutes, c'est-à-dire le même pour tous les mouvements, et à toutes les époques, pour un même mouvement; c'est pour cela qu'il ne le mentionne pas.

Leibniz n'avait pas plus songé que Newton à formuler les lois du mouvement uniformément varié. Nous ne verrons apparaître

que bien plus tard la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2.$$

11. L'effort centrifuge dans un mouvement de circulation peut être exprimé par le sinus verse de l'arc décrit (les lignes trigonométriques, à cette époque, étaient encore des longueurs), ou par la différence entre la sécante de ce même arc et le rayon.

De là il résulte que le sinus verse étant en raison doublée de la corde, ou de l'arc, ou de la vitesse, les forces centrifuges de mobiles qui décrivent uniformément des circonférences égales sont en raison doublée des vitesses; et que, si les circonférences sont différentes, ces forces centrifuges sont en raison composée de la raison doublée des vitesses et de la raison réciproque de celle des rayons.

C'est encore le langage de Huyghens.

12. La force centrifuge d'un mobile dont la circulation est harmonique varie en raison inverse de la raison triplée des rayons. Cela résulte du dernier corollaire de la proposition précédente.

Cela posé, soit θa une surface constante égale au double de l'aire M_2SM_3 (*fig.* 22) décrite dans un des intervalles égaux du temps : le quotient de cette aire par le rayon SM_2, ou ρ, sera la distance M_3D_2 de M_3 à SM_2; on aura donc

$$M_3D_2 = \frac{\theta a}{\rho};$$

d'un autre côté, si l'on rabat le rayon SM_3 en ST_2, D_2T_2 représentera l'effort centrifuge, dans le mouvement de circulation;

mais

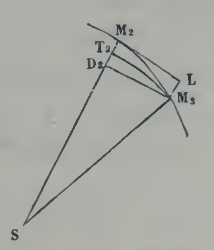
$$D_2T_2 = \frac{\overline{M_3D_2}^2}{2SM_3};$$

la mesure de l'effort centrifuge sera donc

$$\frac{\theta^2 a^2}{2\rho^3}.$$

En réalité, si dA représente le double de l'aire décrite dans le

Fig. 22.



temps dt, et qu'on désigne par ν la vitesse dans le mouvement de circulation,

$$dA = \nu\, dt\, \rho;$$

donc

$$\nu = \frac{1}{\rho}\,\frac{dA}{dt};$$

par conséquent

$$\frac{\nu^2}{\rho} = \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2,$$

ou, si l'on remplace dA par $a\theta$,

$$\frac{\nu^2}{\rho} = \frac{1}{\rho^3}\,\frac{a^2\theta^2}{dt^2}.$$

Leibniz ne représente donc la force centrifuge que par sa moitié, comme nous l'avons déjà fait remarquer. Cela peut être permis, puisqu'il ne s'agit que de représentation proportionnelle, pourvu, bien entendu, que la même proportion soit gardée entre toutes les forces considérées dans la même question.

13. Il s'agit dans ce paragraphe de l'hypothèse où, en même temps que le mouvement de circulation serait harmonique, celui qui s'effectue dans la direction du rayon serait uniforme. Nous omettons ce passage.

14. La force paracentrique en M_2 (*sollicitatio paracentrica*) est représentée par la droite M_3L, menée du point M_3 infiniment voisin de M_2, parallèlement au rayon SM_2, et terminée à la tangente en M_2 à la trajectoire.

Il y a là une double erreur : en premier lieu,

$$\frac{2\,LM_3}{dt^2}$$

est l'accélération totale du mobile : en enlevant donc le facteur $\frac{2}{dt^2}$, dont Leibniz a déjà fait abstraction dans l'estimation de la force centrifuge, relative au mouvement de circulation, il faudrait regarder LM_3 comme représentant la force totale qui agit sur le mobile. Mais Leibniz a voulu décomposer cette force en deux : la force développée par l'éther ambiant qui retient la planète dans la trajectoire de son mouvement de circulation et la sollicitation paracentrique; il faudrait donc regarder LM_3 comme représentant proportionnellement la somme de ces deux forces. En réalité, en désignant par j_c et j_p les accélérations dues à la force centripète et à la *sollicitation paracentrique*. il faudrait

poser

$$\frac{2\,LM_3}{dt^2} = j_c + j_p,$$

et, par conséquent,

$$j_p = \frac{2\,LM_3}{dt^2} - j_c.$$

15. Dans tout mouvement où la circulation est harmonique, l'élément de l'impulsion paracentrique (*impetus paracentrici*),

Fig. 23.

c'est-à-dire l'incrément de la vitesse pour descendre vers le centre, est la différence entre la sollicitation paracentrique et le double de l'effort centrifuge.

Soient (*fig.* 23) $AM_1M_2M_3\ldots$ la trajectoire du mobile, où les arcs M_1M_2 et M_2M_3 sont supposés parcourus dans des temps égaux, et S le centre des aires; $SP = SM_1$, $ST_1 = SM_2$ et $ST_2 = SM_3$; M_1N, M_2D_1 et M_3D_2 les perpendiculaires abaissées de M_1, M_2 et M_3 sur SM_2, SM_1 et SM_2; enfin M_2L la tangente à

la trajectoire en M_2, et LM_3 la parallèle à M_2S, déjà considérée dans la proposition précédente.

« Puisque, dit Leibniz, la circulation est harmonique, les triangles M_1SM_2 et M_3SM_2 sont équivalents; donc, ces triangles ayant même base SM_2, leurs hauteurs M_2N et M_3D_2 sont égales. »

Ce point est exact.

« Prenons $M_2G = LM_3$ et joignons M_3G, qui sera parallèle à LM_2 : les deux triangles

$$M_1NM_2 \text{ et } M_3D_2G$$

seront semblables, et, comme

$$M_1M_2 = GM_3,$$

on aura aussi

$$NM_2 = GD_2. \text{ »}$$

Ce point pourrait être admis si l'on avait à faire la somme $NM_2 + GD_2$, que l'on remplacerait, sans difficulté, par $2\,NM_2$ ou par $2\,GD_2$; mais si c'est la différence $NM_2 - GD_2$, de ces deux infiniment petits du premier ordre, dont on a besoin, et que les termes de l'équation à laquelle on veut arriver soient du second ordre, il y aura erreur à considérer cette différence comme nulle.

« Cela posé,

$$PM_2 = SM_1 - SM_2,$$

et

$$M_2T_2 = SM_2 - SM_3,$$

mais déjà

$$PM_2 = NM_2 + NP = GD_2 + NP,$$

d'après ce qui vient d'être dit; et

$$M_2T_2 = M_2G + GD_2 - D_2T_2;$$

donc la différence

$$PM_2 - M_2T_2$$

est égale, d'une part, à la différence seconde des rayons, et, de l'autre, à

$$NP + D_2T_2 - M_2G,$$

c'est-à-dire à

$$2\,D_2T_2 - M_2G,$$

puisque

$$NP = D_2T_2.$$

En résumé donc

$$dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G. \text{ »}$$

Il n'y avait pas inconvénient à remplacer $NP + D_2T_2$ par $2\,D_2T_2$, mais il ne fallait pas supprimer la différence $NM_2 - GD_2$ et l'équation véritable serait

$$dd\rho = (NM_2 - GD_2) + 2\,D_2T_2 - LM_3.$$

Quoi qu'il en soit, voici comment Leibniz traduit l'équation à laquelle il est parvenu,

$$dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G :$$

« La différence des rayons exprime la vitesse suivant le rayon et leur différence seconde exprime l'élément de cette vitesse suivant le rayon; d'un autre côté, D_2T_2 représente l'effort centrifuge et M_2G ou LM_3 représente la gravité (*sollicitatio gravitatis*). Donc *l'élément de la vitesse paracentrique est la différence entre le double de l'effort centrifuge et la gravité simple.* »

Mais si nous divisons par dt^2 les deux membres de l'équation de Leibniz,

$$PM_2 - M_2T_2 = dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G,$$

elle donne

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = 2\,\frac{D_2T_2}{dt^2} - \frac{M_2G}{dt^2}.$$

Or $-\frac{d^2\rho}{dt^2}$ est l'accélération du mouvement suivant le rayon, comptée positivement dans le sens MS_2 ; $2\,\frac{D_2T_2}{dt^2}$ est l'accélération dans le mouvement de circulation ; et enfin $\frac{M_2G}{dt^2}$ est la moitié de l'accélération totale. Mais cette accélération totale devrait se composer de la sollicitation paracentrique et de la force centripète correspondant au mouvement de circulation. La traduction de l'équation aurait donc dû être : *L'incrément de la vitesse pour descendre vers le centre est la différence entre la force centripète et la moitié de la somme de la sollicitation paracentrique et de la force centripète*

$$-\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{1}{2}(\dot{j}_p + \dot{j}_c) - \dot{j}_c$$

$$= \frac{1}{2}\dot{j}_p - \frac{1}{2}\dot{j}_c.$$

Ainsi Leibniz n'a pas traduit exactement l'équation qu'il avait obtenue. Mais, comme nous l'avons déjà fait pressentir, cette équation même est fausse. En effet, on sait que, dans un mouvement rapporté à des coordonnées polaires, lorsque la loi des aires s'observe par rapport au pôle, l'accélération totale, dirigée du mobile vers le centre d'action, est la somme de l'accélération centripète, correspondant au mouvement de circulation, et de l'accélération suivant le rayon, comptée positivement du mobile vers le centre d'action. Or l'accélération totale est ici $2\,\frac{M_2G}{dt^2}$; par con-

séquent Leibniz aurait dû trouver

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = 2\,\frac{D_2T_2}{dt^2} - 2\,\frac{M_2G}{dt^2}.$$

16. Si l'on connaît l'incrément de la vitesse suivant le rayon, on connaîtra la force de la gravité, car on connaîtra toujours la force centrifuge.

En effet, elle est représentée par $\omega^2\rho$, ω désignant la vitesse angulaire de circulation; mais on a

$$a\theta = \rho^2\omega\, dt,$$

d'où

$$\omega^2\rho = \frac{(a\theta)^2}{dt^2}\,\frac{1}{\rho^3}.$$

17. Dans un mouvement où la circulation est harmonique, les incréments de l'angle, pour des éléments égaux du temps, sont réciproquement proportionnels aux carrés des rayons; car les circulations sont entre elles dans la raison composée de l'angle parcouru et du rayon; et les circulations élémentaires sont en raison réciproque doublée des rayons.

C'est-à-dire

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'^2}{\rho^2},$$

parce que

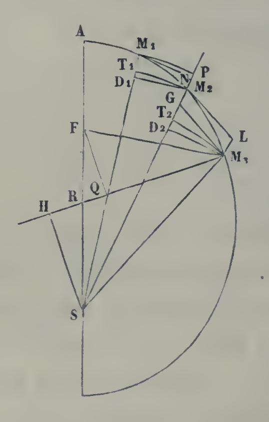
$$\omega = \frac{a\theta}{\rho^2\, dt} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{a\theta}{\rho'^2\, dt}.$$

18. Si une ellipse est décrite d'un mouvement harmonique autour de l'un de ses foyers, la vitesse de circulation, T_2M_2 ou D_2M_3 (*fig.* 24), la vitesse suivant le rayon, M_2D_2 et la vitesse du mobile lui-même, M_2M_3 seront respectivement entre elles

comme le petit axe $2b$, la moyenne proportionnelle entre les résultats obtenus en ajoutant à la distance $2c$ des deux foyers les différences $\rho - \rho'$ et $\rho' - \rho$ des rayons vecteurs menés des foyers au point où se trouve le mobile, c'est-à-dire

$$\sqrt{4c^2 - (\rho - \rho')^2},$$

Fig. 24.



et enfin

$$2\sqrt{\rho\rho'}.$$

En effet, si l'on mène la normale à l'ellipse en M_3 et que l'on abaisse du foyer S la perpendiculaire SH sur cette normale,

$$HM_3, \ SH \quad \text{et} \quad M_3S$$

seront proportionnels à

$$D_2M_3, \ M_2D_2 \quad \text{et} \quad M_2M_3,$$

c'est-à-dire à la vitesse de circulation, à la vitesse suivant le

rayon et à la vitesse du mobile, parce que les triangles

$$HM_3S \quad \text{et} \quad D_2M_3M_2 \quad \text{ou} \quad T_2M_3M_2$$

seront semblables, comme étant rectangles et ayant leurs angles en M_3 égaux.

Il suffira donc de démontrer que

$$HM_3, \ SH \quad \text{et} \quad M_3S$$

sont effectivement proportionnels à

$$2b, \quad \sqrt{(2c+\rho-\rho')(2c+\rho'-\rho)} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\rho\rho'},$$

ce que l'on vérifiera aisément en abaissant aussi du second foyer une perpendiculaire FQ sur la même normale, de façon à obtenir le triangle FM_3Q semblable à SM_3H, et sachant d'ailleurs que le pied R de la normale sur l'axe divise la distance des foyers en parties proportionnelles aux deux rayons vecteurs.

19. Si une ellipse est décrite d'un mouvement harmonique autour de l'un de ses foyers, l'attraction qu'éprouvera le mobile vers ce foyer sera directement proportionnelle au carré de la circulation, ou réciproquement proportionnelle au carré du rayon vecteur.

Nous avons trouvé cela, dit Leibniz, par une application élégante de notre calcul différentiel, ou de l'analyse des infinis.

Représentons le double de l'élément M_1SM_2 de l'aire par

$$2\frac{b^2}{a}\theta,$$

la circulation, D_2M_3 sera $2\dfrac{b^2}{a}\dfrac{\theta}{\rho}$,

$$D_2M_3 = 2\frac{b^2}{a}\frac{\theta}{\rho},$$

et D_2M_2 sera $d\rho$,

$$D_2M_2 = d\rho.$$

Mais, d'après la proposition précédente,

$$\frac{D_2M_2}{D_2M_3} = \frac{\sqrt{4c^2-(\rho'-\rho)^2}}{2b} = \frac{\sqrt{4c^2-(2a-2\rho)^2}}{2b} = \frac{\sqrt{c^2-(a-\rho)^2}}{b},$$

on aura donc

$$\frac{d\rho}{2\,\dfrac{b^2}{a}\,\dfrac{\theta}{\rho}} = \frac{\sqrt{c^2-(\rho-a)^2}}{b},$$

ou

$$b\rho\, d\rho = 2\,\frac{b^2}{a}\,\theta\sqrt{c^2-(\rho-a)^2},$$

qui est l'équation différentielle du mouvement, dont l'équation *differentio-différentielle* est

$$b\,d\rho^2 + b\rho\, dd\rho = -2\,\frac{b^2}{a}\,\theta\,\frac{(\rho-a)\,d\rho}{\sqrt{c^2-(\rho-a)^2}},$$

d'après les principes du calcul que nous avons exposé dans ce *Journal*. Si l'on élimine $d\rho$ entre ces deux équations, on trouve, réductions faites,

$$d\,d\rho = \frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3} - \frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2},$$

« Ce qui démontre, dit Leibniz, la proposition énoncée, car $dd\rho$ mesure l'élément de la vitesse suivant le rayon, $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3}$ est le double de l'effort centrifuge, il faut donc que $\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2}$ représente la gravité. Cette force varie donc en raison inverse du carré de la distance. »

Mais, d'abord, en réalité, $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3}$ représente la force centrifuge dans le mouvement de circulation, ou plutôt l'accélération centripète, et non pas le double de cette accélération, de sorte que, en divisant les deux membres de l'équation de Leibniz par dt^2, et représentant par j_c l'accélération centripète $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3\,dt^2}$, et par j_r l'accélération du mouvement suivant le rayon, comptée positivement de M vers S, laquelle est $-\frac{d^2\rho}{dt^2}$, cette équation devient

$$\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2\,dt^2} = j_r + j_c.$$

D'un autre côté, l'accélération totale, dirigée du mobile vers le centre d'action, dans un mouvement où la loi des aires s'observe, est, comme nous l'avons déjà dit,

$$j = j_r + j_c,$$

par conséquent

$$\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2\,dt^2}$$

représente l'accélération totale du mouvement, et non pas la gravité, telle que l'entend Leibniz, c'est-à-dire : la sollicitation paracentrique qu'il faudrait combiner avec la force centripète pour avoir la force effective.

On doit toutefois observer que, si la traduction est inexacte, l'équation, du moins, est juste.

Newton avait trouvé pour l'accélération totale

$$j = \frac{8K^4}{L\rho^2} = \frac{8K^4}{\frac{2b^2}{a}\rho^2},$$

K^2 désignant l'aire décrite dans l'unité de temps, c'est-à-dire, ce que Leibniz représente par

$$\frac{\frac{b^2}{a}\theta}{dt}.$$

La formule de Newton revient donc à

$$j = 4\frac{\frac{b^2}{a}\theta^2}{\rho^2 dt^2} = 4\frac{b^2}{a\rho^2}\left(\frac{\theta}{dt}\right)^2.$$

Ainsi, il y a identité.

En résumé, Leibniz a, dans cette question, commis faute sur faute, et tout cela pour avoir introduit contre toute raison une idée aussi bizarre que préconçue, celle de la décomposition en deux de la force qui agit sur une planète.

S'il s'était borné aux quelques lignes qui composent les numéros 18 et 19, il aurait eu l'avantage sur Newton; mais si Newton a lu le *Tentamen*, il n'a pas dû en être bien jaloux.

Les propositions suivantes ayant moins d'importance, nous nous bornons à en traduire les énoncés :

20. La même planète est attirée par le Soleil avec une énergie variable et qui est en raison doublée de la distance.

Leibniz, dans ce passage, dit qu'il ne connaît le *Livre des Principes* que par le compte rendu qui en a été fait dans les *Acta Eruditorum*. Il aurait dû le lire entièrement avant d'écrire son *Tentamen*, et Newton a pu être justement froissé d'une sorte de dédain injustifiable.

21. L'attraction exercée sur une planète est à la force centrifuge de cette planète comme sa distance actuelle au Soleil est au quart du *latus rectum* de l'ellipse qu'elle parcourt.

22. La vitesse d'une planète est toujours plus grande que sa vitesse paracentrique, parce que les trajectoires sont presque circulaires.

23. La vitesse de circulation est maximum au périhélie, minimum à l'aphélie.

24. La vitesse paracentrique est minimum lorsque la distance de la planète au Soleil est la moitié du *latus rectum* de l'orbite. Elle est nulle au périhélie et à l'aphélie.

25. La force centrifuge d'une planète est toujours moindre que l'attraction exercée sur elle par le Soleil.

26. Les impulsions (*impetus*) que la planète reçoit (*concepit*) de l'action continue du Soleil, dans des parcours finis, sont comme les angles des rayons vecteurs extrêmes.

27. Le mouvement de chaque planète est périodique, c'est-à-dire qu'elle se retrouve dans les mêmes conditions, au même point de son orbite, après une révolution complète.

28. Il y a donc dans l'orbite six points remarquables : les quatre sommets et les deux extrémités du *latus rectum* (corde principale menée par le foyer).

29. Les orbites des planètes sont des ellipses, et non des paraboles ou des hyperboles, parce que la force centrifuge est moindre que l'attraction. Le mouvement serait parabolique si la force centrifuge était égale à l'attraction, hyperbolique si elle la surpassait; et, dans ce cas, le centre d'attraction serait intérieur à la branche d'hyperbole décrite. Si, au lieu d'être attirée, la planète était repoussée, le centre de répulsion serait en dehors de la branche parcourue.

Excerptum ex epistola auctoris quam pro sua hypothesi phy-

sica motus planetarii ad amicum scripsit, c'est-à-dire : *Extrait d'une lettre que l'auteur écrivit à un ami sur son hypothèse physique relativement au mouvement des planètes.* (Acta Eruditorum, 1706.)

Leibniz, dans cet extrait, répond à des objections qui lui avaient été faites, et avoue assez ingénument ses torts, mais il y commet de nouvelles fautes encore plus graves.

« Un savant homme, dit-il, qui, dans un ouvrage sur l'Astronomie, combattit, il y a quelques années, mon hypothèse, n'en a pas assez bien saisi la force et l'utilité. Elle a cela de particulièrement commode que les corps solides, circulant harmoniquement dans un fluide ayant un mouvement semblable, se meuvent comme ils feraient dans le vide, c'est-à-dire dans un milieu non résistant, etc.

« Cependant, je dois convenir qu'il y a dans mon travail quelque chose à améliorer sinon pour le fond, au moins quant aux énoncés, ce qui fera mieux apparaître l'accord des vérités. Ainsi l'on doit dire que l'impulsion paracentrique résulte de la gravité et de l'effort centrifuge *simple*, et non pas double, comme je l'avais dit par une interprétation inexacte d'un terme.

« Il est certain que la gravitation engendre à chaque instant une nouvelle tendance à tomber vers le centre, mais la force centrifuge en engendre une autre à s'en éloigner, et toutes deux varient avec la distance à ce centre. L'effort total consiste dans leur différence et a la direction de la plus grande. »

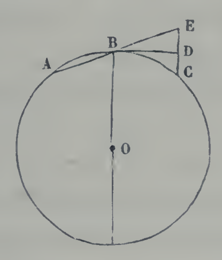
On voit que cela ne s'éclaircit pas beaucoup; mais nous allons tomber dans une obscurité complète :

« L'effort centrifuge peut être entendu de deux manières sui-

vant que l'on considère le mouvement précédent comme se faisant suivant la tangente au cercle, ou suivant l'arc de cercle lui-même. »

Mais je prends la parole, pour aller un peu plus vite. Soient AB l'arc que le mobile vient de parcourir, et BC celui qu'il va décrire dans un temps égal : si, lorsque le mobile est en B, on suppose qu'il se soit mû suivant la tangente BD, la force centri-

Fig. 25.



fuge est représentée par CD $\left(\text{en réalité } 2\,\frac{\mathrm{CD}}{dt^2}\right)$; mais, si on le considère comme ayant décrit l'arc AB ou sa corde, alors la force centrifuge est CE, double de CD. Il y a donc deux forces centrifuges : la force centrifuge *tangentielle* et la force centrifuge *arcuelle*.

Leibniz n'avait considéré que la force centrifuge tangentielle, mais il convient qu'il vaut mieux prendre l'arcuelle et changer les énoncés. On voit qu'il ne s'est pas encore aperçu de son erreur, qui vient simplement de ce qu'au lieu de recourir aux équations, il se borne aux proportions, comme Galilée, Huyghens et Newton. Il n'avait qu'à écrire

$$\mathrm{DC} = \frac{1}{2}\,j\,dt^2,$$

il en aurait tiré

$$j = \frac{2\,\mathrm{DC}}{dt^2},$$

au lieu de : j est représenté proportionnellement par DC.

Quoi qu'il en soit, se trouvant rassuré par son invention de la force centrifuge arcuelle, il conclut par ces mots : *Unde non quidem error, sed tamen inconcinnitas prodiit, quam nunc sublatam esse juvabit.* C'est-à-dire : Il n'y avait pas précisément erreur, mais cependant maladresse; et il sera réjouissant de la voir disparaître.

Il termine par une liste d'errata assez étendue, car il manquait même des lignes dans ses figures. Ainsi la ligne M_3G ne s'y trouve pas.

Il résulte assez clairement de cet extrait que, même en 1706, Leibniz n'avait pas encore lu le livre des *Principes.*



De linea isochrona in qua grave sine acceleratione descendit (Acta Eruditorum, 1689), et *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica.* (Acta Eruditorum, 1694.)

Le premier de ces mémoires contient la solution d'un problème que Leibniz avait proposé aux Cartésiens en 1678 dans les *Nouvelles de la République des lettres.* Il s'agissait de *trouver la courbe le long de laquelle un corps pesant descendrait de hauteurs égales en des temps égaux.* Les équations de cette courbe sont

$$\frac{dy}{dt} = k$$

et

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0).$$

En éliminant le temps et intégrant l'équation résultante, on trouve une parabole quadrato-cubique, dont l'équation, si l'on transporte l'origine au point de départ, est

$$9g^2k^2(x + c)^2 = (2gy - k^2)^3,$$

c désignant une constante.

Mais comme la question n'avait pas été résolue par les Cartésiens, Leibniz ne fait pas connaître la méthode au moyen de laquelle il est parvenu au résultat et se borne à la vérification du fait.

Il remarque seulement que, de toutes les courbes qui répondent à la question, celle le long de laquelle la descente sera le plus rapide aura sa tangente verticale au point de départ.

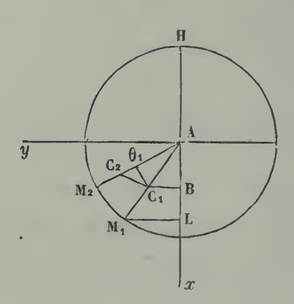
Il termine en proposant à ses adversaires ce nouveau défi : *Trouver la courbe qu'un corps pesant devrait parcourir pour que sa distance à un point fixe variât de quantités égales dans des temps égaux.*

C'est ce problème qui fait l'objet du second mémoire.

Jacques Bernoulli s'en était occupé à propos de la courbe élastique, mais Leibniz trouvait plusieurs défauts à la solution de son ami et disciple : la marche suivie pour la mise en équation du problème était trop compliquée; la solution n'était pas assez simple, enfin Bernoulli avait négligé, dans l'intégration, d'introduire une constante arbitraire, ce qui, dit Leibniz, est indispensable si l'on veut donner aux solutions toute leur généralité. Il ajoute : Comme je vois que cette règle n'est pas assez observée, j'ai voulu l'enseigner ici.

Voici la solution de Leibniz : Soient A (*fig.* 26) le point fixe, dont le mobile doit s'approcher ou s'éloigner de quantités égales dans des temps égaux, H le point d'où ce mobile part sans vitesse, (Leibniz le place sur la verticale du point A) et $AH = a$; soient d'ailleurs C_1 et C_2 deux positions infiniment voisines du mobile, M_1 et M_2 les points de rencontre de AC_1 et AC_2 avec la circon-

Fig. 26.



férence du cercle décrit de A comme centre avec AH pour rayon, C_1C_2 sera représenté par dc, M_1M_2 le sera par dm; quant au temps employé par le mobile pour aller de C_1 en C_2, ce sera dt; soient encore C_1B et M_1L des perpendiculaires à HA, AB sera représenté par x et AL par z : si v désigne la vitesse du mobile en C_1, on aura d'abord

$$dc = v\,dt; \tag{1}$$

littéralement : dc sera comme $v\,dt$ (*dc ut v dt*). Leibniz se sert, il est vrai, de l'équation (1), mais il ne la pose pas, parce que t, comme on va le voir, sera une longueur.

D'un autre côté, puisque, arrivé en C_1, le mobile est descendu d'une hauteur $a + x$, il faudrait poser $v^2 = 2g(a + x)$, mais

Leibniz fait

$$(2) \qquad v^2 = a + x,$$

(littéralement : v^2 *ut* $a + x$,), ce qui ne l'empêche pas se servir de l'équation (2).

Il résulterait des deux équations précédentes

$$dc = dt\sqrt{a + x},$$

mais pour l'homogénéité, dit Leibniz (*ad implendam legem homogeneorum*), nous poserons

$$(3) \qquad dc = dt\,\frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}.$$

La relation véritable serait $dc = dt\sqrt{2g(a + x)}$.

Cela posé, menons $C_1\theta_1$ perpendiculaire à AC_2, on aura

$$(4) \qquad \overline{C_1C_2}^2 = \overline{C_2\theta_1}^2 + \overline{C_1\theta_1}^2.$$

Ici, Leibniz suppose, mais sans le dire, le temps représenté par la distance du mobile au point A, de sorte que $t = AC_1$; il en résulte qu'au moment où le mobile était en H, l'horloge devait marquer a.

En conséquence, Leibniz pose

$$C_2\theta_1 = dt,$$

et comme d'ailleurs

$$\frac{C_1\theta_1}{AC_1} = \frac{M_1M_2}{AM_1},$$

il en conclut, en remplaçant AC_1 par t,

$$C_1\theta_1 = \frac{t\,dm}{a}.$$

L'égalité (4) peut donc être écrite sous la forme

$$(4) \qquad \overline{dc}^2 = \overline{dt}^2 + t^2\,\overline{dm}^2;$$

(Leibniz écrit $dcdc = dtdt + ttdmdm$), ou en remplaçant dc par sa valeur fournie par l'équation (3),

$$(5) \qquad dt^2 + t^2\,dm^2 = dt^2 + dt^2\,\frac{x}{a},$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{dt}{t} = \frac{dm}{\sqrt{ax}};$$

(Il faudrait

$$\left.\frac{dt}{t} = \frac{a\,dm}{\sqrt{ax}}\right).$$

Cela posé, les deux triangles semblables BAC_1 et LAM_1 donnent

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AC_1}{AM_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{z} = \frac{t}{a},$$

d'où

$$(7) \qquad ax = tz;$$

et, en substituant dans l'équation (6), il vient

$$(8) \qquad \frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{dm}{\sqrt{az}};$$

enfin z étant le cosinus (linéaire) de l'arc m

$$dm = \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

donc enfin

$$(9) \qquad \frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{a^3 z - a z^3}};$$

d'où, en intégrant, (*unde summando*)

$$2\sqrt{at} = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{a^3 z - a z^3}} + b,$$

b étant une quantité constante, prise arbitrairement. Quant à la quadrature, Leibniz la remplace par une rectification.

Nous ne ferons sur cette solution qu'une seule remarque, c'est que d'abord, substituer l'équation

$$dc = dt\,\frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}$$

à l'équation véritable

$$dc = dt\sqrt{2g(a + x)},$$

revient à supposer a égal à $2g$ et à multiplier le temps par a; en second lieu que, dans la traduction, l'énoncé a perdu de sa généralité. En effet, pour traduire exactement l'énoncé, il aurait fallu poser

$$AC_1 = kt,$$

k étant une constante donnée. Mais alors les termes qui se détruisent dans l'équation (5)

$$dt^2 + t^2 dm^2 = dt^2 + dt^2\,\frac{x}{a},$$

n'auraient plus disparu, parce que, dans le premier membre dt^2 aurait eu pour coefficient k^2, et, dans le second $2ga$; *ni fallor*, comme dit souvent Leibniz.

Le mémoire débute par des considérations théoriques où nous avons remarqué la notation d^2y au lieu de ddy que Leibniz employait précédemment.

De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales et logarithmos. C'est-à-dire : *Sur la ligne suivant laquelle un fil se courbe par son propre poids et du remarquable usage de cette ligne pour trouver des moyennes proportionnelles en nombre quelconque et les logarithmes.* (Acta Eruditorum, 1691.)

De solutionibus problematis catenarii, aliisque a Dn. Bernoullii propositis. (Acta Eruditorum, 1691.) C'est-à-dire : *Sur les solutions du problème de la chaînette et de quelques autres, proposés par Bernoulli.*

De la chaînette, ou *Solution d'un problème fameux, proposé par Galilée, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, avec son usage pour les logarithmes, et une application à l'avancement de la navigation.* (*Journal des Savants* pour 1692, en français.)

Ces articles contiennent des développements historiques dont nous nous emparons d'abord ; nous donnerons ensuite la solution du problème de la chaînette, d'après Leibniz.

« L'analyse ordinaire de Viète et de Descartes consistant dans a réduction des problèmes à des équations et à des lignes d'un certain degré, M. Descartes, pour maintenir l'universalité, et la suffisance de sa méthode, trouva à propos d'exclure de la Géométrie tous les problèmes et toutes les lignes qu'on ne pouvait

assujettir à cette méthode, sous prétexte que tout cela n'était que mécanique. Mais comme, dans ces problèmes, ces lignes peuvent être construites ou imaginées par le moyen de certains mouvements exacts, qu'elles ont des propriétés importantes, et que la nature s'en sert souvent, on peut dire qu'il fit en cela une faute semblable à celle qu'il avait reprochée à quelques anciens, qui s'étaient bornés aux constructions où l'on n'a besoin que de la règle et du compas, comme si tout le reste était mécanique. »

Nous avons déjà dit que Leibniz revient un peu trop souvent sur ce prétendu tort de Descartes : c'est sans doute l'entêtement étroit des Cartésiens de son temps dans la doctrine stricte du maître qui irritait Leibniz.

« M. de Leibniz ayant remarqué qu'il y a des problèmes et des lignes qui ne sont d'aucun degré déterminé, c'est-à-dire qu'il y a des problèmes dont le degré même est inconnu, ou demandé, et des lignes dont une seule passe continuellement de degré en degré; cette ouverture le fit penser à un calcul nouveau, qui paraît extraordinaire, mais que la nature a réservé pour ces sortes de problèmes transcendants qui surpassent l'Algèbre ordinaire. C'est ce qu'il appelle l'*analyse des infinis*, qui est entièrement différente de la Géométrie des indivisibles de Cavalieri et de l'Arithmétique des infinis de M. Wallis. Car cette Géométrie de Cavalieri, qui est très bornée d'ailleurs, est attachée aux figures, où elle cherche les sommes des ordonnées; et M. Wallis, pour faciliter cette recherche, nous donne par induction les sommes de certains rangs de nombres; au lieu que l'analyse nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en général, comme fait la spécieuse ordinaire. Elle montre un algorithme nouveau, etc.

« Une partie des éléments de ce calcul, avec plusieurs échantillons, a été publiée dans le *Journal de Leipsig*, où l'auteur l'a appliqué particulièrement à quelques problèmes géométrico-physiques; comme par exemple à la ligne isochrone, dans laquelle un corps pesant approche uniformément de l'horizon en descendant; à la ligne loxodromique, ou des rumbs de vent, pour résoudre les plus utiles problèmes géométriques de la navigation, où l'on n'était arrivé jusqu'ici qu'imparfaitement par certaines tables subsidiaires; à la résistance des solides ou des liquides, pour avancer la mécanique, et particulièrement la balistique; aux lois harmoniques des mouvements planétaires, pour approcher de la perfection de l'Astronomie; et à d'autres usages de conséquence.

« Cette méthode fut applaudie, et suivie d'abord par quelques personnes habiles. M. Craigh s'en servit en Angleterre; et ensuite, M. Bernoulli, professeur de Bâle, connu par plusieurs belles productions de Mathématiques, l'ayant étudiée et en ayant remarqué l'importance, pria l'auteur publiquement de l'appliquer à la recherche de la ligne d'une chaînette suspendue par les deux bouts, que Galilée avait proposée, mais qu'on n'avait pas encore déterminée jusqu'ici.

« L'auteur de la méthode y réussit d'abord, et, pour donner aux autres l'occasion d'exercer encore leur méthode, proposa publiquement ce même problème, leur donnant le terme d'un an. Le frère de M. Bernoulli ayant appris que cette méthode y allait, la médita de telle sorte qu'il vint à bout du problème, et donna à connaître par là ce qu'on doit attendre de lui. MM. Bernoulli poussèrent même la recherche plus loin, et l'appliquèrent à d'autres problèmes, qui ont de l'affinité avec celui-ci.

« De ceux qui ont employé d'autres méthodes, on ne connaît que M. Huyghens qui ait réussi.

« J'ai lu avec le plus grand plaisir les trois solutions concordantes du problème. Nous avons tous trouvé la loi des tangentes et la rectification de la courbe; M. Huyghens chercha son rayon de courbure et sa développée, que donne aussi la solution de M. Bernoulli. M. Huyghens trouva la distance de son centre de gravité à l'axe, M. Bernoulli et moi trouvâmes les distances du même point tant à l'axe qu'à la base; j'y ajoutai la détermination du centre de gravité de l'aire de la courbe.

« M. Huyghens, pour construire par points la chaînette, suppose la quadrature de la courbe

$$x^2y^2 = a^4 - a^2y^2;$$

M. Jean Bernoulli et moi nous ramenons la question à la quadrature de l'hyperbole, etc. »

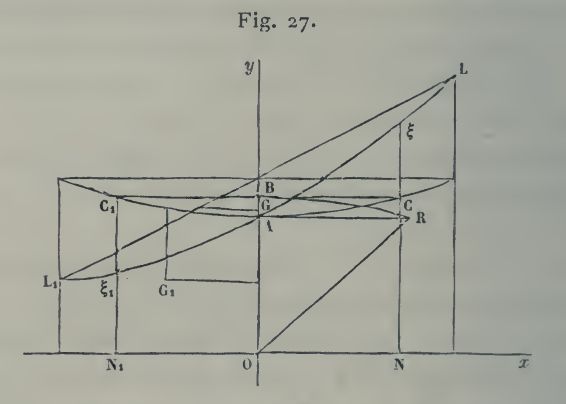
Leibniz reproduit ici, à peu près dans les mêmes termes, ce qu'il écrivait à Bernoulli, dans une lettre que nous avons donnée plus haut, sur son initiation aux Mathématiques, et termine par cette pensée remarquable : « J'ai publié il y a déjà quelques années les éléments de mon calcul différentiel, préférant l'utilité publique à ma gloire, que j'aurais pu mieux servir en cachant ma méthode. Mais il m'est plus agréable de voir dans les jardins des autres les fruits de mes semences. Car je ne pouvais suffisamment m'absorber dans leur culture et il ne manquait pas d'autres buts vers lesquels je pusse ouvrir des voies nouvelles, ce qui m'a toujours paru plus méritoire que de traiter les questions particulières. »

Voici la solution donnée par Leibniz du problème de la chaî-

nette, solution que, malheureusement, il ne fait suivre d'aucune explication :

« Que l'on construise sur les deux axes OX et OY la courbe logarithmique L_1L (*fig.* 27) dont les ordonnées soient les nombres, et les abscisses les logarithmes; que l'on prenne sur cette courbe les deux points ξ, ξ_1 ayant leurs abscisses égales et de sens

Fig. 27.



contraires, en sorte que la moyenne proportionnelle entre leurs ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$ sera OA, ou l'unité; si l'on construit ensuite la moyenne arithmétique OB entre ces deux mêmes ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$ et que par le point B on mène à OX la parallèle C_1BC : C_1 et C seront deux points de la chaînette. »

Cette construction fournit immédiatement l'équation de la chaînette : si N et $\frac{1}{N}$ sont les deux nombres représentés par les ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$, les coordonnées du point C sont

$$x = \log N \quad \text{et} \quad y = \frac{N + \frac{1}{N}}{2};$$

on a donc entre x et y la relation

$$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

a désignant la base du système des logarithmes considérés, base que Leibniz laisse indéterminée.

L'équation de la chaînette, convenablement écrite, est

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right),$$

b désignant la longueur OA.

Nous regrettons de ne pouvoir dire comment Leibniz a pu résoudre le problème.

Voici les solutions qu'il donne, également sans explications, de divers problèmes relatifs à la courbe.

Construire la tangente à la chaînette en un point C. Du point O comme centre avec OB pour rayon, décrivez un cercle qui coupe en R l'horizontale du point A, BOR sera l'inclinaison de la tangente cherchée sur l'horizontale.

Rectifier un arc AC *de la chaînette.* AR est la longueur de l'arc.

Quarrer le segment ACNO *de la chaînette.* Ce segment est égal au rectangle dont les dimensions sont AO et AR.

Trouver le centre de gravité d'un arc CAC_1 *de la chaînette.* On construira une quatrième proportionnelle à AR, à BC et à OA, on ajoutera OB à cette quatrième proportionnelle et la moitié de la somme obtenue donnera la distance OG du centre de gravité cherché au point O.

Trouver le centre de gravité du segment AC_1N_1O. L'or-

donnée de ce point G_1 est la moitié de OG, et son abscisse est celle du point de la chaînette dont l'ordonnée est OG.

Supplementum Geometriæ dimensoriæ, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum, etc., similiterque multiplex constructio lineæ ex data tangentium conditione. C'est-à-dire, autant qu'il est possible de traduire ce latin : *Supplément de Géométrie évaluatoire et constructions multiples de courbes par le moyen des propriétés de leurs tangentes.* (Acta Eruditorum, 1693.)

Nous passons un préambule fort long et nous abrégeons beaucoup le reste.

« Il est un genre de mouvements très approprié à la Géométrie transcendante, parce qu'il se rapporte immédiatement à la considération des tangentes, qui est assez analogue à la description des courbes par des fils reliés à des ombilics ou foyers et que j'ai, je crois, employé le premier à des constructions géométriques.

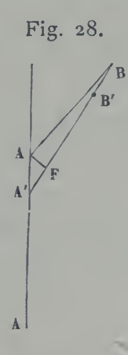
« Si l'on suppose qu'un poids soit attaché à l'extrémité B d'un fil AB (*fig.* 28) tendu sur un plan horizontal, et que l'on fasse décrire une certaine ligne à l'extrémité A, sur le plan, de façon que le fil reste toujours tendu, l'extrémité B décrira une ligne correspondante que l'on peut chercher à déterminer.

« La question m'avait été proposée autrefois à Paris par Claude Perrault, dans l'hypothèse où le point A décrirait une ligne droite, et il avouait ingénument qu'il n'en avait pas la solution. Il avait fait l'expérience en traînant sa montre sur une table, au moyen de la chaîne, dont la seconde extrémité suivait le bord d'une règle.

« Comme j'étais alors très occupé de questions relatives aux tangentes, je reconnus aussitôt que le fil restait constamment tangent à la courbe décrite par le point B, et qu'ainsi la question revenait à déterminer une courbe BB telle que la portion de sa tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe restât constante. »

Voici un peu développé le raisonnement de Leibniz : soit AA′

Fig. 28.



l'élément de la droite AA que l'on veut faire parcourir à l'extrémité A de la chaîne; que l'on joigne BA′, et que du point B comme centre, avec BA pour rayon, on décrive le petit arc de cercle AF : le déplacement AA′ du point A pourra se décomposer dans les deux déplacements AF et FA′; dans le premier, AF, le point B ne bougera pas, mais la chaîne viendra en FB, ayant décrit l'angle ABF autour du point B; dans le second, au contraire, la chaîne se transportera de BF en B′A′, en entraînant le point B de B en B′ sur la droite BA′. L'élément BB′ de la courbe décrite par le point B fera donc un angle infiniment petit avec le fil BA, c'est-à-dire que ce fil restera constamment tangent à la courbe cherchée.

Leibniz ramène la construction d'un point quelconque de la courbe à la quadrature de l'hyperbole.

Il montre enfin que le problème général des quadratures peut être ramené à la recherche d'une courbe dont les tangentes, quant à leur direction, obéissent à une loi donnée.

Communicatio suæ pariter, duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvæ celerrimi descensus, a Dn. Jo. Bernoullio Geometris publicè propositi, unà cum solutione sua problematis alterius, ab eodem postea propositi. C'est-à-dire : *Envoi de la solution de l'auteur ainsi que de deux autres à lui adressées par Jean Bernoulli et le marquis de l'Hospital, du problème de la courbe de plus rapide descente, publiquement proposé aux Géomètres par Jean Bernoulli; avec la solution du même auteur* (Leibniz) *d'un autre problème proposé plus tard par le même* (Jean Bernoulli). (Acta Eruditorum, 1697.)

Outre le précis de la solution par Leibniz des problèmes de la brachystochrone, cet article contient une page d'histoire dont nous extrairons la partie la plus intéressante :

« L'usage de proposer publiquement des problèmes est utile lorsqu'on n'a pas pour but d'enfler son propre mérite, mais d'exciter l'ardeur des autres, afin que, chacun, perfectionnant ses méthodes, l'art d'inventer s'accroisse. Il arrive souvent que des hommes instruits et versés dans l'analyse reçue, mais ne voulant pas s'élever au delà, s'endorment, au grand détriment de la Science. Rien ne peut mieux les réveiller que de leur proposer

des problèmes élégants et utiles, surtout si ces hommes sont plus ingénieux que laborieux.

« Je pense que cet usage a beaucoup contribué au développement de ma méthode infinitésimale des différences et des sommes et à sa vulgarisation par les soins d'hommes distingués, parce qu'elle a été reconnue particulièrement propre à la solution de problèmes très remarquables (*insignibus*).

« C'est ce qui fit que, comme j'allais répondre à un certain abbé Catelan, qui opposait je ne sais quelles objections à mes recherches sur la *Dynamique*, et attribuait beaucoup trop de mérite aux méthodes cartésiennes, l'idée me vint de lui proposer, ainsi qu'à ceux qui pensaient comme lui, le problème peu difficile de la courbe isochrone. Mais ils gardèrent le silence, et M. Huyghens donna la solution, parce que la question lui avait paru élégante. Cependant, comme il avait laissé quelques points dans l'obscurité, j'y suppléai et donnai ma démonstration dans les *Acta Eruditorum*. Mais, comme toutes les choses s'enchaînent, il arriva que M. Jacques Bernoulli, qui n'avait pas d'abord reconnu une grande utilité à mon calcul différentiel, puisant là subitement une plus grande lumière, et entrevoyant l'usage qu'on pouvait faire de cette méthode pour traiter les questions de physique mathématique, me proposa le problème de la chaînette. J'en trouvai la solution et j'aurais pu, en la publiant, jouir seul de la gloire qu'elle m'aurait acquise, mais je préférai appeler les autres au partage, afin de me préparer des coadjuteurs pour développer une très belle méthode. Car il est certain que les esprits ingénieux se laissent volontiers conduire par la gloire et qu'ils préfèrent étudier les questions où tout n'a pas été fait par d'autres. C'est pourquoi je publiai que j'avais trouvé la solution,

mais que j'en différerais l'impression pendant une année, afin de laisser aux autres le temps soit de perfectionner leurs propres méthodes, soit de méditer la mienne et de l'appliquer convenablement.

« Cela me réussit heureusement. Car M. Huyghens (dont nous pleurons aujourd'hui la perte) parvint à sa manière à une solution imparfaite, il est vrai, comme il l'a depuis reconnu ingénument. Mais M. Jean Bernoulli, après avoir davantage approfondi ma méthode, obtint, avec son aide, la solution désirée, savoir la réduction du problème à la quadrature de l'hyperbole, avec cette seule différence qu'il construisait la courbe par la rectification de la parabole, tandis que je me servais pour cela des logarithmes.

« Un succès si remarquable excita merveilleusement les frères Bernoulli à développer la méthode différentielle et à faire en sorte qu'elle parût aussi bien leur appartenir qu'à moi-même. Bientôt après, M. Huyghens, qui n'en avait d'abord conçu qu'une médiocre estime, le marquis de l'Hospital en France et M. Craig en Angleterre suivirent leur exemple.

« Ce qu'a écrit M. Jacques Bernoulli sur la courbe qui limite une voile gonflée par le vent et sur la courbe élastique est particulièrement remarquable. Mais le marquis de l'Hospital a exposé dernièrement dans un ouvrage excellent les principes mêmes de la méthode et l'a enrichie d'applications exquises.

« Enfin, tout dernièrement, M. Jean Bernoulli, professeur à Groningue, entreprit le problème de la ligne de plus rapide descente proposé d'abord par Galilée avec celui de la chaînette, le résolut et le proposa aux autres. Ainsi les deux admirables problèmes proposés par Galilée reçurent leur solution du secours de notre calcul.

« M. Jean Bernoulli non seulement reconnut le premier que la courbe de plus rapide descente est la cycloïde, mais il découvrit que cette courbe cachait un autre mystère, celui de présenter la courbure d'un rayon de lumière dans un milieu continuement variable (de densité), courbure que M. Huyghens avait considérée dans son traité de la lumière, mais qu'il n'avait pas pu déterminer.

« M. Jean Bernoulli proposa donc publiquement ce problème dans les *Actes de Leipsig*, et, par lettre privée, me demanda d'y consacrer quelque temps. J'aurais pu surseoir à cette recherche, au milieu de tant d'autres occupations, mais la beauté du problème m'entraîna comme malgré moi et j'en vins à bout heureusement. Je communiquai ma solution à l'auteur et il me transmit la sienne pour être imprimée en temps voulu.

« Comme au bout de six mois, personne n'avait annoncé qu'il eût trouvé la solution, M. Jean Bernoulli aurait pu en donnant la sienne réclamer la gloire d'une invention si élégante, et je le lui aurais conseillé si j'avais songé davantage à notre intérêt qu'à l'utilité publique. Mais nous convînmes de prolonger le délai de six autres mois, quoique nous pussions aisément prévoir, ce que d'ailleurs j'avais prédit par lettre à M. Jean Bernoulli, que ceux que nous voyons avoir enfin atteint la solution devaient y parvenir s'ils s'y efforçaient suffisamment, surtout ceux qui s'aideraient de nos inventions antérieures, et il n'est pas indigne de remarque que ceux-là seuls résolurent le problème que j'avais prévus en être capables, c'est-à-dire ceux seulement qui avaient pénétré assez profondément dans les mystères de notre calcul différentiel. Mais comme, en dehors du frère de l'auteur et du marquis de l'Hospital, j'avais ajouté d'abondance

que M. Huyghens, s'il survivait, M. Hudde, s'il n'avait pas abandonné ce genre de recherches, et M. Newton, s'il voulait s'y attacher, viendraient à bout de la question, je le redis ici pour ne pas paraître mépriser des hommes considérables à qui le temps peut manquer ou à qui il peut ne pas convenir de traiter nos questions.

« La solution de M. Jean Bernoulli me parvint au mois d'août de l'année dernière; ce que M. Jacques Bernoulli a écrit directement aux *Acta* indique ce qu'il a fait et à quelle époque. Quant au marquis de L'Hospital sa solution me fut envoyée au mois de mars de cette année.

« M. Jean Bernoulli, outre la solution du problème, voulut aussi publier la méthode par laquelle il y était parvenu ; mais il en a deux et n'a donné que la plus indirecte, fondée sur des considérations de Dioptrique. Il ne refusera pas de communiquer l'autre plus directe à ceux qui la lui demanderaient.

« Il y a dans le genre de ces problèmes quelque chose d'inusité et qui dépasse de beaucoup les questions ordinaires de maximums et de minimums, car dans ces dernières tout revient à trouver le maximum ou le minimum de l'ordonnée d'une certaine courbe, ce qui n'est qu'un corollaire de la méthode directe des tangentes. Mais ici, ce que l'on cherche c'est la courbe qui doit l'emporter en quelque chose sur les autres; et sa nature est souvent cachée à ce point que, des conditions données, il ne ressorte, pour ses tangentes, aucune propriété qui permette de ramener la question à la méthode inverse des tangentes.

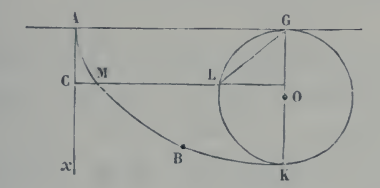
« Et le problème de la chaînette, lui-même, serait de cette nature si on ne l'avait pas réduit à la méthode inverse des tangentes par une préparation convenable. Car il s'agissait de trouver

la figure affectée par une ligne donnée de longueur, ayant ses extrémités en deux points donnés, et dont le centre de gravité fût le plus bas possible.

« D'où l'on voit combien l'Analyse était loin jusqu'ici de la perfection, bien que quelques-uns vantassent leurs méthodes.

« Au reste nous retenons de la solution de M. Jean Bernoulli que par elle se trouvent résolus deux problèmes dioptriques de la

Fig 29.



plus haute importance, devant la difficulté desquels reculèrent M. Huyghens et beaucoup d'autres. Et nous pouvons maintenant définir la courbure continuelle des rayons de lumière de même que la ligne de l'onde formée par les radiations. »

« Mais il est temps que j'expose ma solution. Comme elle est conforme aux autres, je n'ai pas pris le temps de la développer; je me contenterai donc de donner une réponse à la question. J'ai trouvé par le calcul que la ligne cherchée est la quadratrice des segments de cercle. C'est-à-dire que si la ligne ABK (*fig.* 29) est telle que le rectangle de son ordonnée CM et du rayon du cercle GLK, compris entre son point le plus bas et l'horizontale du point A, soit constamment égal au segment de ce même cercle intercepté entre l'arc et la corde GL, AMB sera la voie par laquelle un corps pesant arrivera le plus vite de A en B.

« Or il est facile de voir que cette quadratrice des segments du cercle est la cycloïde ordinaire. »

Leibniz en donne la démonstration, que nous ne rapportons pas. L'article se termine par la solution d'un nouveau problème qu'avait proposé Jean Bernoulli.

Specimen novum Analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas, et *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium.* (Acta Eruditorum, 1702 et 1703.)

Ces deux articles ont trait à la réduction des fractions rationnelles en fractions simples, pour en faciliter l'intégration.

Quoique la question y soit bien traitée, nous n'en dirons rien parce que nous ne savons pas si Leibniz en a tiré la solution de ses propres recherches. Nous ferons toutefois remarquer que le *Traité de la quadrature des courbes*, où Newton s'est occupé de la même question, n'a été publié qu'en 1704.

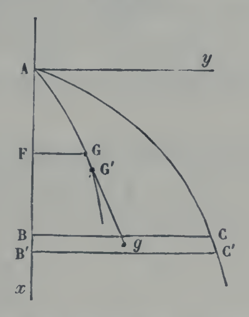
Constructio problematis ducendi rectas quæ tangunt lineas centrorum gravitatis. C'est-à-dire : *Construction de la tangente à la courbe lieu des centres de gravité* (*d'une figure variable*). (Miscellanea Berolinensia, 1706.)

Leibniz appelle ligne des centres de gravité celle qui passe constamment par le centre de gravité d'une grandeur variable suivant une loi déterminée (*ordinatim*). Soit par exemple (*fig.* 30) un triligne rectangle ABC, limité par une courbe définie AC : lorsque la base BC de ce triligne se déplace parallèlement à elle-même, le centre de gravité G du triligne décrit une ligne AG.

Leibniz se propose de construire la tangente à cette courbe et à d'autres analogues.

Soient G le centre de gravité du triligne ABC, g celui du

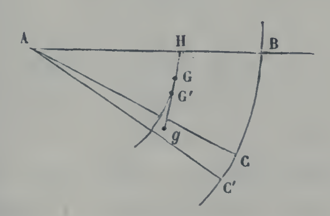
Fig. 30.



segment additionnel infinitésimal BCC′B′ et G′ celui du nouveau triligne AB′C′ : GG′ est l'élément de la courbe considérée, mais cet élément prolongé passe par le point g et la position limite du point g est au milieu de BC, donc la tangente en G à la ligne des centres de gravité passe par le milieu de la base BC du triligne.

Considérons en second lieu un secteur variable ABC (*fig.* 31)

Fig. 31.



limité par une courbe quelconque BC ; soient HG le lieu du centre

de gravité de ce secteur, G le centre de gravité du secteur ABC, G′ celui du secteur ABC′ et g celui du secteur additionnel infinitésimal CAC′ : GG′ est un élément infinitésimal du lieu des centres de gravité, mais cet élément prolongé passerait par g et la position limite de g est au tiers de AC à partir de C; donc la tangente en G à la ligne des centres de gravité passe par le point qui divise AC dans le rapport de 1 à 2, à partir de son extrémité C.

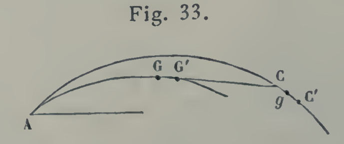
On peut, dans l'exemple précédent, supposer que la courbe BC parte du point A (*fig.* 32) et que le côté fixe de l'angle qui déter-

Fig. 32.

mine le secteur soit la tangente en A à cette courbe; alors le secteur se transforme en un segment à une base, mais la construction de la tangente au lieu du centre de gravité reste la même.

Considérons encore le lieu du centre de gravité d'un arc

Fig. 33.



variable d'une courbe donnée. Soient (*fig.* 33) A l'extrémité fixe de cet arc, C son extrémité mobile, C′ un point infiniment voisin de C, et G le centre de gravité de l'arc AC : la tangente

en G à la ligne des centres de gravité sera GC parce que la position limite du milieu g de CC′ est en C.

Leibniz ajoute qu'on pourrait vérifier ces résultats par le calcul différentiel, mais non d'une manière aussi générale que par la considération des grandeurs elles-mêmes, car ce n'est pas là le lieu d'employer le calcul; il constatera, toutefois, le concours des deux méthodes relativement à la question qui se rapporte au triligne rectangle.

Nous reproduisons ce passage pour montrer à quel point Leibniz avait perfectionné ses notations.

Soient (*fig.* 30)

$$AB = x, \quad BC = y, \quad AF = z \quad \text{et} \quad GF = u,$$

le triligne ABC aura pour expression

$$\int y\,dx,$$

son moment par rapport à l'axe Ax sera

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx,$$

et son moment par rapport à Ay

$$\int xy\,dx.$$

z sera donc représenté par

$$\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx},$$

et u le sera par

$$\frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

En conséquence on aura

$$dz = \frac{xy\,dx \int y\,dx - y\,dx \int xy\,dx}{(\int y\,dx)^2},$$

et

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 dx \int y\,dx - y\,dx \int y^2 dx}{(\int y\,dx)^2},$$

d'où résulte

$$\frac{dz}{du} = 2\,\frac{x \int y\,dx - \int xy\,dx}{y \int y\,dx - \int y^2 dx},$$

qui est le coefficient angulaire (par rapport à Ay) de la tangente à la courbe lieu du centre de gravité du triligne. Or cette formule s'accorde avec la règle donnée pour la construction de la tangente à cette courbe en un de ses points : en effet, si K est le milieu de BC, d'après la règle, la tangente en G sera GK, mais son coefficient angulaire sera

$$\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BK} - \mathrm{FG}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x - z}{\frac{y}{2} - u}$$

ou

$$\frac{x - \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}}{\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{\int y\,dx}},$$

ou mieux

$$2\,\frac{x \int y\,dx - \int xy\,dx}{y \int y\,dx - \int y^2 dx},$$

c'est-à-dire ce que l'on avait trouvé directement.

De lineæ super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis et composito ex ambobus. C'est-à-dire : *Du mouvement d'une ligne sur une autre et de ses trois espèces, le glissement, le roulement et le mouvement composé des deux.* (Acta eruditorum, 1706.)

Cet article ne contient rien de bien remarquable ni de bien nouveau. Leibniz démontre, d'abord, que, si une courbe roule sur une autre, sans glissement, elle tourne à chaque instant autour du point de contact; en second lieu, que, si une courbe glisse sur une autre, en restant parallèle à elle-même, et de manière que le point de rencontre ne se déplace pas sur la courbe mobile, un point quelconque lié à cette courbe mobile décrit une courbe égale à la courbe fixe.

Il resterait à analyser la correspondance de Leibniz avec Wallis; mais nous n'y avons rien trouvé qui mérite d'être signalé d'une manière spéciale, après tout ce que nous avons déjà rapporté des autres Ouvrages de Leibniz. La raison n'en est pas que cette correspondance ne soit pas intéressante par elle-même, mais plutôt, d'abord, qu'elle roule principalement, ce qui est tout naturel, sur les questions qui avaient fait l'objet des travaux de Wallis et qui avaient d'abord attiré l'attention de Leibniz dans sa jeunesse; en second lieu, que cette correspondance ne s'établit qu'à partir de 1695, époque à laquelle Leibniz avait publié les plus importants de ses mémoires.

Nous nous bornons à tirer de cette correspondance, qui persista dans les termes les plus amicaux jusqu'en 1699, la preuve de la douceur de caractère de Leibniz; car Wallis, de

son côté, n'entendait pas raillerie sur ce qui pouvait toucher sa nation.



Nous n'avons étudié Leibniz, dans ce qui précède, que comme géomètre; il nous est impossible de passer sous silence l'influence considérable qu'il a exercée sur les progrès des sciences naturelles, dont, comme Descartes, c'est-à-dire en vrai philosophe, il se préoccupait bien plus encore que de Géométrie.

Nous avons rapporté en leur lieu les découvertes de Harvey, de Graaf et de Leuwenhoek, relatives à la génération. Ces découvertes n'avaient donné naissance qu'à des théories contradictoires, où le père et la mère étaient alternativement destitués et investis de l'influence prépondérante.

On ne saurait dire que Leibniz résolut entièrement la question, puisque l'embryogénie est encore entourée de bien des doutes, mais il présenta sur le sujet des idées justes, dont la plupart sont restées dans la science.

« Aujourd'hui, dit-il dans sa *Monadologie*, que l'on s'est aperçu, par des recherches exactes faites sur les plantes, les insectes et les animaux, que les corps organiques de la nature ne sont jamais produits d'un chaos ou d'une putréfaction, mais toujours par des semences dans lesquelles il y avait sans doute quelque préformation, on a jugé que le corps organique ou l'animal même y était déjà avant la conception, et que, par le moyen de la conception, cet animal a été seulement disposé à une grande transformation, pour devenir un animal d'une autre espèce. Les animaux, dont quelques-uns sont élevés au degré des plus grands animaux

par le moyen de la conception, peuvent être appelés spermatiques, mais ceux d'entre eux qui demeurent dans leur espèce, c'est-à-dire la plupart, naissent, se multiplient et sont détruits comme les grands animaux, et il n'y a qu'un petit nombre d'élus qui passe à un plus grand théâtre. »

Ceci n'est qu'une idée vague, peut-être juste, mais peu utile à la science. Leibniz rendit un plus grand service en affirmant le premier que l'un et l'autre sexe participent à un égal degré à la formation du fœtus, la mère en fournissant l'ovule, et le père le spermatozoaire. Voici ce qu'il écrivait à ce sujet à M. Bourguet, en 1715 :

« Je n'oserais assurer que les animaux que M. Leuwenhoek a rendus visibles dans les semences, soient justement ceux que j'entends ; mais aussi je n'oserais encore assurer qu'ils ne le sont point, et j'attends avec impatience ce que M. Wallisnieri nous donnera sur la question ; et, en attendant, je n'en voudrais pas parler aussi décisivement que vous le faites, en disant que le sentiment de M. Leuwenhoek est une fable des plus creuses. M. Huyghens, qui était un des hommes les plus pénétrants de son temps, n'en jugeait pas ainsi.

« La prodigieuse quantité de ces animaux (qui sont votre première objection) ne s'y oppose en rien. On trouve une abondance semblable dans les semences de quelques plantes. Il y en a, par exemple, dont la graine consiste en une poussière très menue. Je ne vois pas non plus qu'il y ait de la difficulté sur l'introduction dans l'œuf de l'un de ces animaux, à l'exclusion des autres (ce qui fait votre seconde objection) ; il s'en introduit beaucoup apparemment, puisqu'ils sont si petits ; mais il y a sans doute dans l'œuf un seul endroit qui en peut recevoir avec effet ;

et cela satisfait aussi à votre troisième objection, qui est que leur petitesse extrême n'a pas de proportion avec l'œuf. La quatrième objection est que l'œuf et le fœtus sont le même animal, mais cette proposition n'est point prouvée; il se pourrait que l'œuf ne fût qu'un réceptacle propre à donner l'accroissement et à aider la transformation. La cinquième objection est que, selon les zoologues modernes, et particulièrement selon Wallisnieri, les spermatozoaires doivent être des animaux de leur espèce, qui se propagent et se perpétuent tout comme il arrive aux autres animaux qui nous sont connus. C'est de quoi je demeure d'accord; mais, à mon avis, quand ces animaux seraient les vrais animaux séminaux, ils ne laisseraient pas d'être une espèce particulière de vivants, dont quelques-uns seraient élevés à un plus haut degré par une transformation.

« Cependant, je n'oserais pas non plus assurer que votre sentiment soit faux, qui va à soutenir, que l'animal à transformer est déjà dans l'œuf, quoique la conception paraisse plus vraisemblable. Ne décidons donc rien d'un ton trop affirmatif, et surtout ne traitons point mal un homme comme M. Leuwenhoek, à qui le public doit des grâces pour les peines qu'il a prises dans ses recherches. »

Toutes ces idées étaient neuves à l'époque. Leibniz n'aida pas moins au succès des théories nouvelles sur la génération des plantes. Voici ce qu'il dit des découvertes de Camérarius et de Burckardus, dans une *Lettre sur la méthode botanique :* « Ces deux observateurs voient, dans le pollen très subtil des fleurs, de l'analogie avec la semence des mâles. La capsule destinée à recevoir le pollen doit être comparée à l'ovaire des femelles. Cette capsule communique avec l'extérieur par un tube délicat; le

pollen détaché par le vent se transporte à l'extrémité de ce tube et pénètre ainsi dans l'ovaire et y féconde les œufs ou la semence. La preuve en est que, si l'on enlève le pollen, la fécondation n'a pas lieu. »

Nous croyons devoir reproduire encore les remarquables idées de Leibniz sur la série totale des êtres animés :

« En commençant depuis nous et allant jusqu'aux choses les plus basses, c'est une descente qui se fait par fort petits degrés et par une suite continue de choses qui diffèrent fort peu l'une de l'autre. Il y a des poissons qui ont des ailes et à qui l'air n'est pas étranger, et il y a des oiseaux qui habitent dans l'eau et ont le sang froid comme les poissons. Il y a des animaux qui approchent si fort de l'espèce des oiseaux et de celle des bêtes, qu'ils tiennent le milieu entre eux. Les amphibies tiennent également des bêtes terrestres et aquatiques. Il y a des bêtes qui semblent avoir autant de connaissance et de raison que quelques hommes; et il y a une si grande proximité entre les animaux et les végétaux, que, si vous prenez le plus imparfait des uns et le plus parfait des autres, à peine remarquerez-vous aucune différence considérable entre eux. Ainsi les espèces sont liées ensemble, et ne diffèrent que par des degrés presque insensibles.

« Je pense avoir de bonnes raisons pour croire que toutes les différentes classes des êtres dont l'assemblage forme l'univers ne sont, dans les idées de Dieu, qui connaît distinctement leurs gradations essentielles, que comme autant d'ordonnées d'une même courbe dont l'union ne souffre pas qu'on en place d'autres, entre deux, à cause que cela marquerait du désordre et de l'imperfection.

« Les hommes tiennent donc aux animaux, ceux-ci aux

plantes, et celles-ci de rechef aux fossiles, qui se lieront à leur tour aux corps que les sens et l'imagination nous représentent comme parfaitement morts et informes.

« Or, puisque la loi de continuité exige que, quand les déterminations essentielles d'un être se rapprochent de celles d'un autre, aussi, en conséquence, les propriétés du premier doivent s'approcher graduellement de celles du dernier, il est nécessaire que tous les ordres des êtres naturels ne forment qu'une seule chaîne dans laquelle les différentes classes, comme autant d'anneaux, tiennent si étroitement les unes aux autres, qu'il est impossible aux sens ou à l'imagination de fixer précisément le point où quelqu'un commence ou finit : toutes les espèces qui bordent, ou qui occupent, pour ainsi dire, les régions d'inflexion ou de rebroussement devant être équivoques et douées de caractères qui peuvent se rapporter aux espèces voisines également.

« Ainsi l'existence de zoophytes, par exemple, ou, comme Boddens les nomme, de plantes animaux, n'a rien de monstrueux, mais il est même convenable à l'ordre de la nature qu'il y en ait. Et telle est la force du principe de continuité chez moi, que non seulement je ne serais pas étonné d'apprendre qu'on eût trouvé des êtres qui, par rapport à plusieurs propriétés, comme celles de se nourrir ou de se multiplier, puissent passer pour des végétaux à aussi bon droit que pour des animaux, et qui renversent les règles communes bâties sur la supposition d'une séparation parfaite et absolue des différents ordres des êtres simultanés qui remplissent l'univers; j'en serais si peu étonné, dis-je, que même je suis convaincu qu'il doit y en avoir de tels et que l'histoire naturelle parviendra peut-être à les connaître un jour, quand elle aura étudié davantage cette infinité d'êtres vivants que leur peti-

tesse dérobe aux observations communes, et qui se trouvent cachés dans les entrailles de la terre et dans les abîmes des eaux.

« Nous n'observons que depuis hier, comment serions-nous fondés à nier ce que nous n'avons pas encore eu occasion de voir?

« Le principe de continuité, qui est hors de doute chez moi, pourrait servir à établir plusieurs vérités importantes dans la véritable philosophie, laquelle, s'élevant au-dessus des sens et de l'imagination, cherche l'origine des phénomènes dans les régions intellectuelles. Je me flatte d'en avoir quelques idées, mais ce siècle n'est pas fait pour les recevoir. »

« Leibniz, dit M. Papillon, ne se trompe pas; et cette parole n'est point l'exclamation d'un présomptueux orgueil, c'est l'expression simple et sincère de la vérité.

« Aussi bien, c'est la marque des hommes de génie de penser non pour leurs contemporains, mais pour la postérité, et voilà justement pourquoi ils sont mieux appréciés et paraissent plus grands longtemps après leur mort que de leur vivant même, à l'inverse des talents qui subjuguent leur époque et s'en font admirer, mais dont la gloire ne dure pas. »

En physiologie, où il rejette avec la même force les théories mécaniques et animistes de Descartes et de Stahl, Leibniz n'est pas moins original. Ses vues à ce sujet ont donné naissance à la doctrine du *vitalisme*, fondée essentiellement sur ce principe que la vie totale d'un organisme individuel résulte des vies particulières d'une infinité d'organismes infiniment petits, chaque être vivant n'étant qu'une agglomération d'autres êtres vivants en nombre immense.

Enfin, Leibniz fonda en quelque sorte la géologie moderne dans sa *Protogée,* où il explique, même à l'aide d'expériences directes, l'existence de tant d'empreintes et de vestiges de plantes ou d'animaux aujourd'hui disparus, empreintes ou vestiges qui n'avaient été pris avant lui, si ce n'est par Bernard Palissy, que pour des jeux de la nature.

« Ces idées, dit Flourens, ne firent pas alors grande sensation. Le siècle n'était pas préparé à les recevoir La *Protogæa*, écrite en latin, ne sortit pas des cabinets des savants. Il fallait, pour le triomphe des idées de Leibniz, que Buffon les reprît dans la seconde moitié du XVIIIe siècle et leur prêtât une puissance nouvelle, celle de l'éloquence. »

FIN DE LA SIXIÈME PARTIE.

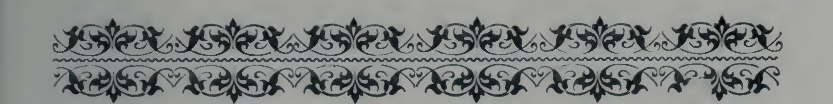


TABLE ALPHABÉTIQUE.



Paris. — Imp. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.







